Analisi Matematica 1- Lista n. 25

Calcolo di Integrali Impropri

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Calcolare i seguenti integrali impropri:

1) $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$

2) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx = 6$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x(\sqrt{2}+\ln x)} \, dx = +\infty$

4) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{\pi}{2} + \ln 2$

5) $\int_{-\infty}^0 e^{\sqrt[3]{x}} \, dx = 6$

6) $\int_{-1}^0 \ln\left(\frac{1}{x^8}\right) dx = 8$

7) $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin x \ln(\cos x) \, dx = 1$

8) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\pi \arctan x}} \, dx = \sqrt{2}$

9) $\int_{81}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} \, dx = 2\ln 2$

10) $\int_e^{+\infty} \frac{e^{\frac{2x+e}{x}}}{x^2} \, dx = e^2 - e$

11) $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{x^2 \cos\left(\frac{\pi}{6x}\right)} \, dx = 3\ln 3$

12) $\int_{-2}^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt[8]{4-x^2}}\right) dx = 1 - 2\ln 2$

Rispondere, motivando la risposta, alle seguenti domande:

13) Dopo aver calcolato i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{3n} \frac{1}{x} dx \overset{\ln 3}{=}$, (b) $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n^2} \frac{1}{x} dx = +\infty$ e (c) $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+\sqrt{n}} \frac{1}{x} dx = 0$; trovare (a_n) e (b_n) che tendano a $+\infty$ e tali che:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x} \, dx = 51$$

[BASTA CHE $\frac{b_n}{a_n} \to e^{51}$

AD ESEMPIO: $\begin{cases} a_n = n \\ b_n = e^{51} \cdot n \end{cases}$]

14) Cosa succede nel problema (13) se la funzione integranda è $\frac{1}{x^2}$ invece che $\frac{1}{x}$?

[RISPOSTA: SUCCEDE CHE, COMUNQUE SI PRENDANO (a_n) E (b_n) TALI CHE $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, SI HA $\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^2} dx \to 0$]

15) Dire quali sono le $f \in C([0,+\infty))$ tali che, comunque si prenda $\lambda \in \mathbb{R}$, è sempre possibile trovare due successioni (a_n) e (b_n) che tendano a $+\infty$ e tali che $\lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx = \lambda$.

[RISPOSTA: SONO TUTTE E SOLE QUELLE $f(x)$ CHE HANNO UNA PRIMITIVA $F(x)$ NON LIMITATA]