Risposte lista E5 - Calcolo Differenziale

Nota. [15 settembre 2017] A differenza della maggior parte delle altre liste di risultati, questa non è ancora stata controllata abbastanza da renderla ”sicura”. Per questo motivo sarò grato a chiunque trovasse qualche errore, se me lo segnalerà all'indirizzo: `callegar@mat.uniroma2.it`

1. La risposta corretta è: $\frac{81}{5}$.

2. La risposta corretta è: $\frac{17}{36}$.

3. La risposta corretta è: $\frac{69}{20}$.

4. La risposta corretta è: $-\frac{38}{45}$.

5. La risposta corretta è: ”Ci sono 3 soluzioni x_1, x_2, x_3 e si ha $x_1 \in (-2,-1)$, $x_2 \in (0,1)$ e $x_3 \in (1,2)$.”

6. La risposta corretta è: ”C'è una sola soluzione e sta nell'intervallo $(1,2)$.”

7. La risposta corretta è: ”C'è solo la soluzione $x = 0$.”

8. La risposta corretta è: ”C'è solo la soluzione $x = 0$.”

9. Schema della dimostrazione: posto $g(x) = 2x^2$ e $h(x) = -2x^2$ si ha $h(0) = f(0) = g(0)$, $h'(0) = f'(0) = g'(0)$ e $-4 = h''(x) \leq f''(x) \leq g''(x) = 4$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Grazie a questo si riesce a dimostrare che $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. In particolare per $x = 2$ si ottiene $-8 = h(2) \leq f(2) \leq g(2) = 8$.

10. La risposta corretta è: ”Nessuna sol. per $\alpha > 2143$, 1 sol. per $\alpha = 2143$, 2 sol. per $2015 < \alpha < 2143$ e per $\alpha < 2008$, 3 sol. per $\alpha = 2015$ e per $\alpha = 2008$, 4 sol. per $2008 < \alpha < 2015$.”

11. La risposta corretta è: ”Nessuna sol. per $\alpha > 2150$, 1 sol. per $\alpha = 2150$, 2 sol. per $2022 < \alpha < 2150$ e per $\alpha < 2015$, 3 sol. per $\alpha = 2022$ e per $\alpha = 2015$, 4 sol. per $2015 < \alpha < 2022$.”

12. La risposta corretta è: ”Nessuna sol. per $\alpha > 2204$, 1 sol. per $\alpha = 2204$, 2 sol. per $2079 < \alpha < 2204$ e per $\alpha < 2015$, 3 sol. per $\alpha = 2079$ e per $\alpha = 2015$, 4 sol. per $2015 < \alpha < 2079$.”

13. La risposta corretta è: ”Nessuna sol. per $\alpha > 2015$, 2 sol. per $\alpha < 1999$ e per $\alpha = 2015$, 3 sol. per $\alpha = 1999$, 4 sol. per $1999 < \alpha < 2015$.”

14. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + O\left(x^8\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(6)}(0) = 16$.

15. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{720} + O\left(x^8\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(6)}(0) = 1$.

16. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{15}x^5 + O\left(x^7\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(5)}(0) = 88$.

17. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + O\left(x^7\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(5)}(0) = 12$.

18. Per il punto (**a**) basta osservare che $f(x) = 1 + h(|x-1|)$ con $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e quindi il suo grafico si ottiene da quello (semplicissimo) di $h(x)$, prendendone la parte per $x \geq 0$ e prolungandola per parità anche ad $x < 0$, per poi traslare il tutto di 1 verso l'alto e di 1 verso destra.

Per il punto (**b**) la risposta corretta è: per $\alpha \geq 1$ c'è solo la soluzione $x = 0$; per $0 < \alpha < 1$ ci sono 2 soluzioni x_1 e x_2, con $0 < x_1 < 1$ e $x_2 = 0$.

19. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = x^2 + \dfrac{5}{3}x^4 - \dfrac{13}{45}x^6 + O\left(x^8\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(6)}(0) = -208$.
Per il punto (**c**) si ha: $g^{(2015)}(0) = 0$.

20. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = -2x^4 + \dfrac{49}{30}x^6 + O\left(x^8\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: 30.

21. Per il punto (**a**) la risposta corretta è: f ha dominio $D = [1, +\infty)$, è strettamente crescente e strettamente concava su D, il suo minimo è $f(1) = 0$ e, per $x \to +\infty$, tende a 1 crescendo.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: ha 2 soluzioni x_1 e x_2, con $1 < x_1 < 2$ e $2 < x_2 < 3$.

22. Per il punto (**a**) il limite vale: $\dfrac{11}{90}$ per $\alpha = 8$, $+\infty$ per $\alpha > 8$ e 0 per $0 < \alpha < 8$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(8)}(0) = 4928$ e $f^{(9)}(0) = 0$.

23. Per il punto (**a**) il limite vale: $\dfrac{13}{45}$ per $\alpha = 8$, $+\infty$ per $\alpha > 8$ e 0 per $0 < \alpha < 8$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(8)}(0) = 11648$ e $f^{(9)}(0) = 0$.

24. Per il punto (**a**) il limite vale: $-\dfrac{34}{45}$ per $\alpha = 8$, $+\infty$ per $\alpha > 8$ e 0 per $0 < \alpha < 8$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(8)}(0) = -30464$ e $f^{(9)}(0) = 0$.

25. Per il punto (**a**) il limite vale: $-\dfrac{49}{45}$ per $\alpha = 8$, $+\infty$ per $\alpha > 8$ e 0 per $0 < \alpha < 8$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(8)}(0) = -43904$ e $f^{(9)}(0) = 0$.

26. La risposta corretta è: "Ci sono 3 soluzioni x_1, x_2, x_3 e si ha $-5 < x_1 < -4$, $x_2 = 0$ e $0 < x_3 < 1$."

27. La risposta corretta è: "Ci sono 3 soluzioni x_1, x_2, x_3 e si ha $-1 < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 1$ e $3 < x_3 < 4$."

28. La risposta corretta è: "Ci sono 4 soluzioni x_1, x_2, x_3, x_4 e si ha $-2 < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$, $x_3 = 0$ e $0 < x_4 < 1$."

29. La risposta corretta è: "Ci sono 4 soluzioni x_1, x_2, x_3, x_4 e si ha $-1 < x_1 < 0$, $x_2 = 0$, $0 < x_3 < 1$ e $1 < x_4 < 2$."

30. Se per assurdo $f''(x)$ non si annullasse mai allora, essendo continua, dovrebbe essere sempre strettamente positiva oppure sempre strettamente negativa. Di conseguenza $f(x)$ sarebbe, su tutto $\mathbf{R}$, o strettamente convessa o strettamente concava, quindi nessuna retta potrebbe intersecare il suo grafico in più di 2 punti, contraddicendo l'ipotesi.

31. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $x_1 = 0$, e $0 < x_2 < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$."

32. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $x_1 < -5$, e $x_2 > 5$."

33. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $0 < x_1 < 1$, e $x_2 = 1$."

34. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x_1 < 0$, e $x_2 = 0$."

35. L'implicazione $(b) \implies (a)$ è vera (si dimostra con de l'Hôpital) mentre l'implicazione $(a) \implies (b)$ è falsa (come controesempio basta prendere $f(x) = x + \sin x$).

36. Per il punto (**a**) il limite vale: $-\dfrac{1}{8}$ per $\alpha = 5$, $+\infty$ per $\alpha > 5$ e 0 per $0 < \alpha < 5$.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: per $x = 0$ $f(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

37. Per il punto (**a**) il limite vale: $-\dfrac{1}{4}$ per $\alpha = 5$, $+\infty$ per $\alpha > 5$ e 0 per $0 < \alpha < 5$.

Per il punto (**b**) la risposta corretta è: per $x = 0$ $f(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

38. Per il punto (**a**) il limite vale: $-\dfrac{1}{4}$ per $\alpha = 5$, $+\infty$ per $\alpha > 5$ e 0 per $0 < \alpha < 5$.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: per $x = 0$ $f(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

39. Per il punto (**a**) il limite vale: $-\dfrac{1}{8}$ per $\alpha = 5$, $+\infty$ per $\alpha > 5$ e 0 per $0 < \alpha < 5$.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: per $x = 0$ $f(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

40. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $-1 < x_1 < 0$ e $x_2 = 0$."

41. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $x_1 = 0$ e $1 < x_2 < 2$."

42. La risposta corretta è: "Ci sono 3 soluzioni x_1, x_2, x_3 e si ha $-1 < x_1 < 0$, $x_2 = 0$ e $0 < x_3 < 1$."

43. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $0 < x_1 < 1$, e $1 < x_2 < 2$."

44. L'implicazione $(a) \Longrightarrow (b)$ è vera: si dimostra che, essendo $f(x)$ una funzione pari, tutte le sue derivate di ordine dispari sono funzioni dispari, quindi si annullano per $x = 0$ e quindi tutti i termini di grado dispari dello sviluppo di Taylor di $f(x)$ sono nulli.
Invece l'implicazione $(b) \Longrightarrow (a)$ è falsa: come controesempio basta prendere $f(x) = x^{11}$.

45. Per il punto (**a**) il limite vale: $-\dfrac{11}{30}$ per $\alpha = 7$, $+\infty$ per $\alpha > 7$ e 0 per $0 < \alpha < 7$.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: per $x = 0$ $f(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

46. La risposta corretta è: 0 per $\beta = 3$, $\dfrac{3}{4}$ per $\beta = 5$ e $+\infty$ per $\beta = 15$.

47. Per il punto (**b**) la risposta corretta è: ci sono 2 soluzioni x_1 e x_2, con $-\dfrac{1}{2} < x_1 < 0$ e $1 < x_2 < \dfrac{3}{2}$.
Per il punto (**c**) la risposta corretta è: $f(x)$ è strettamente concava su tutta la semiretta $[1, +\infty)$, invece su $(-\infty, 0)$ c'è un punto di flesso $x_0 \in (-1, 0)$ ed $f(x)$ è strettamente convessa su $(-\infty, x_0]$ e strettamente concava su $[x_0, 0)$.

48. La risposta corretta è: (**a**) è vera mentre (**b**) è falsa. Come controesempio per (**b**) basta prendere $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x-1)^2$.

49. La risposta corretta è: $\dfrac{2}{3}$ per $\beta = 6$, *"non esiste"* per $\beta = 7$ e $+\infty$ per $\beta = 8$.

50. La risposta corretta è: $\dfrac{2}{3}$ per $\beta = 6$, *"non esiste"* per $\beta = 7$ e $+\infty$ per $\beta = 8$.

51. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $-1 < x_1 < 0$, e $x_2 = 0$."

52. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $x_1 = 0$, e $0 < x_2 < 1$."

53. Per il punto (**a**) il valore cercato è $n = 6$ e per tale valore di n il limite vale -1.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: per $x = 0$ $f(x)$ ha un punto di massimo relativo.

54. Per il punto (**a**) il valore cercato è $n = 7$ e per tale valore di n il limite vale 1.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: per $x = 0$ $f(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

55. Per il punto (**c**) la risposta corretta è: "Ci sono 3 soluzioni x_1, x_2, x_3 e si ha $-\dfrac{1}{4} < x_1 < 0$, $0 < x_2 < \dfrac{1}{2}$, e $x_3 > \dfrac{1}{2}$."

56. Per il punto (**c**) la risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $x_1 = 1$, e $1 < x_2 < 2$."

57. Per il punto (**a**) il valore cercato è $n = 8$ e per tale valore di n il limite vale $-\dfrac{7}{8}$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(6)}(0) = 0$, $f^{(7)}(0) = 0$ e $f^{(8)}(0) = -35280$.

58. Per il punto (**a**) il valore cercato è $n = 8$ e per tale valore di n il limite vale $-\frac{11}{96}$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(6)}(0) = 0$, $f^{(7)}(0) = 0$ e $f^{(8)}(0) = -4620$.

59. Per il punto (**c**) la risposta corretta è: "Ci sono 3 soluzioni x_1, x_2, x_3 e si ha $x_1 < -3$, $-1 < x_2 < 0$ e $x_3 = 0$."

60. Per il punto (**c**) la risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2, e si ha $x_1 = 0$ e $0 < x_2 < \sqrt{e}$."

61. La risposta corretta è: $\frac{2}{15}$.

62. La risposta corretta è: $\frac{41}{60}$.

63. La risposta corretta è: $\frac{37}{30}$.

64. La risposta corretta è: $-\frac{41}{60}$.

65. La risposta corretta è: "Ci sono 4 soluzioni x_1, x_2, x_3, x_4 e si ha $x_1 < -\sqrt[3]{2}$, $-\sqrt[3]{2} < x_2 < -1$, $x_3 = -1$ e $x_4 > 0$."

66. La risposta corretta è: "Ci sono 4 soluzioni x_1, x_2, x_3, x_4 e si ha $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x_1 < 1$, $x_2 = 1$, $1 < x_3 < \sqrt[3]{2}$ e $x_4 > \sqrt[3]{2}$."

67. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $x_1 = 0$ e $0 < x_2 < 1$."

68. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $-1 < x_1 < 0$ e $x_2 = 0$."

69. La risposta corretta è: $-\frac{5}{27}$ per $\alpha = 4$, $+\infty$ per $\alpha > 4$ e 0 per $0 < \alpha < 4$.

70. La risposta corretta è: $-\frac{3}{16}$ per $\alpha = 4$, $+\infty$ per $\alpha > 4$ e 0 per $0 < \alpha < 4$.

71. La risposta corretta è: $-\frac{77}{432}$ per $\alpha = 4$, $+\infty$ per $\alpha > 4$ e 0 per $0 < \alpha < 4$.

72. La risposta corretta è: $-\frac{1}{6}$ per $\alpha = 4$, $+\infty$ per $\alpha > 4$ e 0 per $0 < \alpha < 4$.

73. La risposta corretta è: "C'è solo la soluzione $x = 1$."

74. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $x_1 = 0$ e $1 < x_2 < 2$."

75. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $x_1 = 0$ e $1 < x_2 < 2$."

76. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $x_1 = 0$ e $0 < x_2 < 1$."

77. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = -\frac{4}{15}x^9 - \frac{2}{9}x^{10} + \frac{692}{1575}x^{11} + O\left(x^{12}\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(11)}(0) = 17538048$.

78. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = \frac{x^9}{120} - \frac{x^{10}}{12} - \frac{x^{11}}{5040} + O\left(x^{13}\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(11)}(0) = -7920$.

79. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = \frac{x^9}{60} - \frac{x^{10}}{12} - \frac{59}{5040}x^{11} + O\left(x^{12}\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(11)}(0) = -467280$.

80. Per il punto (**a**) si ha: $f(x) = -\frac{x^9}{24} - \frac{x^{10}}{4} + \frac{x^{11}}{720} + O\left(x^{13}\right)$ per $x \to 0$.
Per il punto (**b**) si ha: $f^{(11)}(0) = 55440$.

81. La risposta corretta è: "Ci sono 2 soluzioni x_1, x_2 e si ha $\frac{1}{9} < x_1 < 1$ e $1 < x_2 < 2$."

82. La risposta corretta è: "C'è una sola soluzione e sta nell'intervallo $(1, 3)$."

83. La risposta corretta è: "C'è una sola soluzione e sta nell'intervallo $(-2, -1)$."

84. La risposta corretta è: 1 per $\alpha = 5$ e $+\infty$ per $\alpha = 6$.

85. La risposta corretta è: $-\frac{1}{2}$ per $\alpha = 5$ e $-\infty$ per $\alpha = 6$.

86. Per il punto (**a**) la risposta corretta è: $f(x)$ è una funzione dispari definita su tutto $\mathbf{R}$, sempre decrescente, convessa per $x \geq 0$ e concava per $x \leq 0$; ha due asintoti orizzontali: $y = 1$ per $x \to -\infty$ e $y = -1$ per $x \to +\infty$; nel punto di flesso $x = 0$ la sua derivata vale -2.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: 3 soluzioni x_1, x_2 e x_3, con $-\frac{3}{2} < x_1 < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x_2 < 0$ e $\frac{3}{2} < x_3 < \frac{5}{2}$,
Per il punto (**c**) la risposta corretta è: per $-2 < m < 0$.

87. Per il punto (**a**) la risposta corretta è: $f(x)$ è una funzione dispari definita su tutto $\mathbf{R}$, sempre crescente, convessa per $x \leq 0$ e concava per $x \geq 0$; ha due asintoti orizzontali: $y = 1$ per $x \to +\infty$ e $y = -1$ per $x \to -\infty$; nel punto di flesso $x = 0$ la sua derivata vale $\frac{3}{2}$.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: 3 soluzioni x_1, x_2 e x_3, con $-\frac{5}{2} < x_1 < -\frac{3}{2}$, $0 < x_2 < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} < x_3 < \frac{3}{2}$,
Per il punto (**c**) la risposta corretta è: per $0 < m < \frac{3}{2}$.

88. Per il punto (**a**) il limite vale: -1 per $\alpha = 6$, $-\infty$ per $\alpha > 6$ e 0 per $0 < \alpha < 6$.
Per il punto (**b**) il limite vale: -1 per $\alpha = 2019$, $-\infty$ per $\alpha > 2019$ e 0 per $0 < \alpha < 2019$.

89. Per il punto (**a**) il limite vale: $-\frac{1}{2}$ per $\alpha = 6$, $-\infty$ per $\alpha > 6$ e 0 per $0 < \alpha < 6$.
Per il punto (**b**) il limite vale: $-\frac{1}{2}$ per $\alpha = 2019$, $-\infty$ per $\alpha > 2019$ e 0 per $0 < \alpha < 2019$.

90. Per il punto (**a**) la risposta corretta è: $f(x)$ è una funzione pari definita su tutto $\mathbf{R}$; ha una cuspide per $x = 0$; è strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente su $[0, +\infty)$; è strettamente convessa su $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right]$ e su $\left[\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}, +\infty\right)$ mentre è strettamente concava su $\left[-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}, 0\right]$ e su $\left[0, \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right]$; non ha asintoti.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: 4.

91. Si tratta della stessa funzione del problema **90**, anche se scritta in modo diverso.

92. Per il punto (**a**) la risposta corretta è: $f(x)$ è definita su $D = (2, +\infty)$ e su tale insieme è sempre crescente e concava; inoltre per $x \to 2^+$ ha un asintoto verticale mentre per $x \to +\infty$ è asintotica all'asse x.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: il comportamento qualitativo di $g(x)$ è come quello di $f(x)$, con l'unica eccezione che $g(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, ma senza avere asintoto obliquo.

93. Per il punto (**a**) la risposta corretta è: $f(x)$ è definita su $D = (1, +\infty)$ e su tale insieme è sempre crescente e concava; inoltre per $x \to 1^+$ ha un asintoto verticale mentre per $x \to +\infty$ è asintotica all'asse x.
Per il punto (**b**) la risposta corretta è: il comportamento qualitativo di $g(x)$ è come quello di $f(x)$, con l'unica eccezione che $g(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, ma senza avere asintoto obliquo.