Analisi Matematica 1- Lista T1

Quesiti sulle successioni

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Dire se sono vere o false le seguenti affermazioni, motivando la risposta:

1) Se (a_n) e (b_n) sono indeterminate allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$ non esiste. $\boxed{\text{FALSO}}$

2) $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$ $\boxed{\text{VERO}}$

3) $a_n \to 1$ se e solo se $|a_n| \to 1$ $\boxed{\text{FALSO}}$

4) Se $a_n \simeq b_n \to +\infty$ allora $\sqrt{1+a_n} \simeq \sqrt{1+b_n}$ $\boxed{\text{VERO}}$

5) Se $a_n \simeq b_n \to +\infty$ allora $e^{a_n} \simeq e^{b_n}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

6) Se $a_n \simeq b_n \to +\infty$ allora $(a_n)^n \simeq (b_n)^n$ $\boxed{\text{FALSO}}$

7) Se $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ e $a_n = o(b_n)$ allora $b_n + a_n \simeq b_n$ $\boxed{\text{VERO}}$

8) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to 0$ allora a_n è decrescente $\boxed{\text{FALSO}}$

9) Se $a_n \to 2$ e $b_n \to 2$ allora $(a_n)^n \simeq (b_n)^n$ $\boxed{\text{FALSO}}$

10) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$ $\boxed{\text{FALSO}}$

11) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$ allora $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ $\boxed{\text{VERO}}$

12) Se $a_n \to \ell$ allora $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \to \ell$ $\boxed{\text{VERO}}$

13) Se $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \to \ell$ allora $a_n \to \ell$ $\boxed{\text{FALSO}}$

14) Se $a_n>0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $a_n\to\ell>0$ allora $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n}\to\ell$ $\boxed{\text{VERO}}$

15) Se $a_n>0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n}\to\ell>0$ allora $a_n\to\ell$ $\boxed{\text{FALSO}}$

16) Se $a_n\to+\infty$ allora $a_{n+1}\approx a_n$. $\boxed{\text{FALSO}}$

17) Se $a_n>0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $a_n\to 0$ allora $a_n^{a_{n+1}}\to 1$ $\boxed{\text{FALSO}}$

18) Se $a_n\to 0$ decrescendo strettamente allora $a_n^{a_{n+1}}\to 1$ $\boxed{\text{VERO}}$

19) Se $a_n\to 0$ decrescendo strettamente allora $a_{n+1}^{a_n}\to 1$ $\boxed{\text{FALSO}}$

20) Se $a_n\to+\infty$ allora anche $\lfloor a_n\rfloor\to+\infty$ e si ha $a_n\approx\lfloor a_n\rfloor$ $\boxed{\text{VERO}}$

21) Se $a_n\to\ell\in\mathbb{R}$ allora anche $\lfloor a_n\rfloor$ tende a un limite finito $\boxed{\text{FALSO}}$

22) Se $a_n\to+\infty$ allora $a_n^{a_n}\approx\lfloor a_n\rfloor^{\lfloor a_n\rfloor}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

Dire, motivando la risposta, in quale dei seguenti casi A è compatto.

23) $A=[0,1]$ $\boxed{\text{SI}}$ 24) $A=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}-\{0\}\right\}$ $\boxed{\text{NO}}$ 25) $A=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}-\{0\}\right\}\cup\{0\}$ $\boxed{\text{SI}}$

26) $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ $\boxed{\text{NO}}$ 27) Presa $a_n\to\ell\in\mathbb{R}$ definiamo $A=\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{\ell\}$ $\boxed{\text{SI}}$

28) Presa (a_n) limitata definiamo $A=\{\ell\in\mathbb{R}\mid\exists(a_{n_k})$ sottosuccessione di (a_n) t.c. $a_{n_k}\to\ell\}$ $\boxed{\text{SI}}$

Trovare l'insieme A dei punti limite (e in particolare $\max\lim_{n\to+\infty}$ e $\min\lim_{n\to+\infty}$) di (a_n) nei casi seguenti:

29) $a_n = (-1)^n$ $\boxed{A=\{-1,1\}}$

30) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ $\boxed{A=\{e, \frac{1}{e}\}}$

31) $a_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{n\pi}{6}$ $\boxed{A=\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}}$

32) $a_n = (-n)^{\sin\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}}$ $\boxed{A=\{-\infty, 0\}}$

33) $a_n = \log_2 n - \lfloor \log_2 n \rfloor$ $\boxed{A=[0,1]}$

34) $a_n = \sin n$ $\boxed{A=[-1,1]}$

Dire, motivando le risposte, se sono vere o false le seguenti affermazioni:

35) Sia $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, dove $\forall n\in\mathbb{N}$ K_n è compatto e contiene K_{n+1}. Allora $K \neq \emptyset$. $\boxed{\text{VERO}}$

36) Sia $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, dove $\forall n\in\mathbb{N}$ C_n è chiuso e contiene C_{n+1}. Allora $C \neq \emptyset$. $\boxed{\text{FALSO}}$

37) Se (a_n) è di Cauchy allora tutte le sue sottosuccessioni sono di Cauchy $\boxed{\text{VERO}}$

38) Se da ogni sottosuccessione di (a_n) si può estrarre una sottosuccessione di Cauchy allora (a_n) è di Cauchy. $\boxed{\text{FALSO}}$

39) Date (a_n) e (b_n) si ha $\max\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n + \max\lim_{n\to+\infty} b_n$ $\boxed{\text{VERO}}$

40) È possibile scegliere (a_n) e (b_n) in modo che nella (39) valga la disuguaglianza stretta $\boxed{\text{VERO}}$

41) Data (a_n) si ha $\min\lim_{n\to+\infty}(-a_n) = -\max\lim_{n\to+\infty} a_n$ $\boxed{\text{VERO}}$

42) Date (a_n) e (b_n) si ha $\max\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n) \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n - \min\lim_{n\to+\infty} b_n$ $\boxed{\text{VERO}}$

43) Data (a_n) si ha $\max\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \left|\max\lim_{n\to+\infty} a_n\right|$ $\boxed{\text{FALSO}}$