Analisi Matematica 1- Lista T2

Quesiti sui limiti di funzioni

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Scrivere in modo formale il significato delle seguenti locuzioni e delle loro negazione:

1) $\lim_{x\to 5} f(x) = 11$ → $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ tale che $\forall x \in I_\delta(5) \cap (\text{Dominio}(f) - \{5\})$ si ha $|f(x) - 11| < \varepsilon$

NEGAZIONE: $\exists \varepsilon>0$ tale che $\forall \delta>0\ \exists x \in I_\delta(5) \cap (\text{Dominio}(f) - \{5\})$ tale che $|f(x)-11| \geq \varepsilon$

2) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -3$ → $\forall \varepsilon>0\ \exists M>0$ tale che $\forall x \in \text{Dominio}(f)$, se $x > M$ si ha $|f(x) - (-3)| < \varepsilon$

NEGAZIONE: $\exists \varepsilon>0$ tale che $\forall M>0\ \exists x \in \text{Dominio}(f)$ tale che $x > M$ e $|f(x) - (-3)| \geq \varepsilon$

3) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ → $\forall S>0\ \exists M<0$ tale che $\forall x \in \text{Dominio}(f)$, se $x < M$ si ha $f(x) > S$

NEGAZIONE: $\exists S>0$ tale che $\forall M<0\ \exists x \in \text{Dominio}(f)$ tale che $x < M$ e $f(x) \leq S$

4) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ → $\forall S<0\ \exists \delta>0$ tale che $\forall x \in \text{Dominio}(f)$ se $3 < x < 3+\delta$ allora $f(x) < S$

NEGAZIONE: $\exists S<0$ tale che $\forall \delta>0\ \exists x \in \text{Dominio}(f)$ tale che $3 < x < 3+\delta$ e $f(x) \geq S$

Verificare direttamente, usando solo la definizione di limite, che si ha:

5) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE $|x^3-8|<\varepsilon$ E SI TROVA CHE $\forall \varepsilon>0$ L'INSIEME DELLE x CHE LA SODDISFA CONTIENE UN INTORNO DEL PUNTO 2

6) $\lim_{x\to \frac{3}{2}\pi} \sin x = -1$

SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE $|\sin x+1|<\varepsilon$ E SI TROVA CHE $\forall \varepsilon>0$ L'INSIEME DELLE x CHE LA SODDISFA CONTIENE UN INTORNO DEL PUNTO $\frac{3}{2}\pi$

7) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE $\frac{1}{x-2} > M$ E SI TROVA CHE $\forall M>0$ L'INSIEME DELLE x CHE LA SODDISFA CONTIENE UN INTORNO DESTRO DEL PUNTO 2

8) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$

SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE $\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon$ E SI TROVA CHE $\forall \varepsilon>0$ L'INSIEME DELLE x CHE LA SODDISFA CONTIENE UNA SEMIRETTA DESTRA

9) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE $\sqrt{x^2+1} > M$ E SI TROVA CHE $\forall M>0$ L'INSIEME DELLE x CHE LA SODDISFA CONTIENE UNA SEMIRETTA SINISTRA

10) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE $\tan x < M$ E SI TROVA CHE $\forall M<0$ L'INSIEME DELLE x CHE LA SODDISFA CONTIENE UN INTORNO DESTRO DEL PUNTO $\frac{\pi}{2}$

Utilizzando il teorema che caratterizza i limiti di funzioni usando i limiti di successioni (Teorema Ponte) mostrare che i seguenti limiti non esistono:

11) $\lim_{x\to +\infty} \sin x$

PRESE $a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ E $b_n = \pi n$ SI HA $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ MA $f(a_n) \to 1$ E $f(b_n) \to 0$

12) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

PRESE $a_n = \frac{1}{n}$ E $b_n = -\frac{1}{n}$ SI HA $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ MA $f(a_n) \to +\infty$ E $f(b_n) \to -\infty$

13) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

PRESE $a_n = \frac{1}{n}$ E $b_n = -\frac{1}{n}$ SI HA $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ MA $f(a_n) \to +\infty$ E $f(b_n) \to 0$

14) $\lim_{x\to 0^+} \cos \frac{1}{x}$

PRESE $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ E $b_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$ SI HA $a_n \to 0^+$, $b_n \to 0^+$ MA $f(a_n) \to 1$ E $f(b_n) \to -1$

15) $\lim_{x\to +\infty} x - [x]$

PRESE $a_n = n$ E $b_n = n + \frac{1}{2}$ SI HA $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ MA $f(a_n) \to 0$ E $f(b_n) \to \frac{1}{2}$

16) $\lim_{x\to 17} x - [x]$

PRESE $a_n = 17 + \frac{1}{n}$ E $b_n = 17 - \frac{1}{n}$ SI HA $a_n \to 17$, $b_n \to 17$ MA $f(a_n) \to 0$ E $f(b_n) \to 1$

17) $\lim_{x\to +\infty} (-1)^{[2\sqrt{x}]}$

PRESE $a_n = n^2$ E $b_n = (n+\frac{1}{2})^2$ SI HA $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ MA $f(a_n) \to 1$ E $f(b_n) \to -1$

18) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^x$

PRESE $a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ E $b_n = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ SI HA $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ MA $f(a_n) \to e$ E $f(b_n) \to \frac{1}{e}$