Analisi Matematica (II modulo)- Exe. 1

Titolo nota

4 marzo 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

INTEGRALE DI RIEMANN - PROPRIETÀ ELEMENTARI

P.1 CALCOLARE $s(f,P)$ E $S(f,P)$ NEI CASI SEGUENTI:

(a) $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ SU $[-1,1]$ CON $P = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

(b) COME (a) MA CON $f(x) = \chi_{(0,1]}(x)$

(c) $f(x) = x$ SU $[0,1]$ CON $P = \{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\}$

(d) COME (c) MA CON $f(x) = e^x$

P.2 NEI CASI SEGUENTI STABILIRE SE f È $\mathcal{R}$-INTEGRABILE NELL'INTERVALLO INDICATO A FIANCO:

(a) $f(x) = x^2$ SU $[0,1]$

(b) $f(x) = e^x$ SU $[0,1]$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{SE } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{SE } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ SU $[-1,1]$

(d) $f(x) = \chi_A(x)$ SU $[0,1]$ DOVE $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \,\middle|\, m,n \in \mathbb{N} \text{ ED } m \leq 2^n \right\}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & \text{SE } x \in (0,1] \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$ SU $[0,1]$, DOVE $\lfloor \dots \rfloor$ SIGNIFICA "PARTE INTERA DI"

P.3 USANDO SOLO LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN CALCOLARE I SEGUENTI INTEGRALI:

(a) $\int_0^1 x^2\,dx$ [PUÒ ESSERE UTILE RICORDARE LA FORMULA $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$]

(b) $\int_0^1 e^x\,dx$

(c) $\int_0^1 x^3\,dx$ [PUÒ ESSERE UTILE RICORDARE LA FORMULA $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$]

P.4 (a) DATA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, LIMITATA, MOSTRARE CHE SE C'È UNA COSTANTE $\lambda\in\mathbb{R}$ TALE CHE L'INSIEME $\{x\in[a,b] \mid f(x)>\lambda\}$ È FINITO, ALLORA $\int^{+}_{[a,b]} f \le \lambda\cdot(b-a)$

(b) UTILIZZANDO, SE SI VUOLE, IL PUNTO (a), MOSTRARE CHE È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SU $[0,1]$ LA FUNZIONE:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n} & \text{SE } x=\frac{m}{n} \text{ CON } m,n \text{ INTERI POSITIVI COPRIMI} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

P.5 DIRE SE APPARTIENE A $\mathcal{R}([0,1])$ LA FUNZIONE:

$$g(x)=\begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{1}{x}\rfloor}\cdot\frac{-1}{\lfloor \frac{1}{x}\rfloor^2} & \text{SE } x\in(0,1] \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$