Analisi Matematica (II modulo)- Exe. 5

Titolo nota 15/08/2014

8 Aprile 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SONO STATI SVOLTI I PROB. 29-30-37-44-45-46-47 DELLA LISTA DATA.

$\boxed{29}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)!}{n^{n^n}}$ CONVERGE.

SI OSSERVI CHE VALE LA (OVVIA) DISUGUAGLIANZA: $n^{n-1} \geq n!$ VISTO CHE:

$$n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2}_{n-1} < \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n-1} = n^{n-1}$$

INFATTI:

$$n^{n^n} = n^{n \cdot n^{n-1}} = (n^n)^{n^{n-1}} \geq$$

$$\geq (n!)^{n!}$$

QUINDI:

$$\frac{(n!)!}{n^{n^n}} \leq \frac{(n!)!}{(n!)^{n!}} = \frac{\boxed{\frac{(n!)!}{(n!)^{n!-1}}}^{\leq 1}}{n!} \leq \frac{1}{n!} \overset{\text{DEF. IN } n}{\leq} \frac{1}{n^2}$$

DAL FATTO CHE, DEF. IN n, SI ABBIA:

$$\frac{(n!)!}{n^{n^n}} \leq \frac{1}{n^2}$$

E CHE $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGA, SEGUE CHE ANCHE $\sum \frac{(n!)!}{n^{n^n}}$ CONVERGE, PER IL CRIT. DEL CONFRONTO.

$\boxed{30}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^{n!}}{(n^n)!}$ CONVERGE

UTILIZZEREMO IL FATTO CHE:

$\forall \alpha \in [0,1)$, DEFINIT. IN n, $n! > (n^n)^\alpha$

PER DIMOSTRARLO BASTERÀ VERIFICARE CHE SE $0 \leq \alpha < 1$ ALLORA:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n^n)^\alpha}{n!} = 0$$

OSSERVIAMO CHE, POSTO $a_n = \frac{(n^n)^\alpha}{n!}$, PER MOSTRARE CHE $a_n \to 0$ BASTA MOSTRARE CHE $\sum a_n$ CONVERGE, COSA CHE SEGUE DAL CRIT. DEL RAPPORTO, VISTO CHE:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)^{n+1})^\alpha}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n^n)^\alpha} = \underbrace{\boxed{\frac{(n+1)^\alpha}{n+1}}}_{\to 0 \text{ PERCHÉ } \alpha<1} \cdot \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha \to 0 \cdot e^\alpha = 0$$

SI HA: (CON $\alpha = \frac{1}{2}$)

$$(n^n)! > \left((n^n)^{n^n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(n \cdot n^{n-1}\right)^{n^{n-1} \cdot \frac{n}{2}} \geq$$

PER $n \geq 2$, USANDO IL FATTO CHE $n! \geq n^{n-1}$

$$\geq (n \cdot n!)^{n!} = n^{n!} \cdot (n!)^{n!}$$

ABBIAMO QUINDI OTTENUTO CHE DEFINITIVAMENTE IN n SI HA:

$$(n^n)! > n^{n!} (n!)^{n!}$$

QUINDI, DEFINITIVAMENTE IN n, SI HA:

$$\frac{(n!)^{n!}}{(n^n)!} < \frac{(n!)^{n!}}{n^{n!}\cdot(n!)^{n!}} = \frac{1}{n^{n!}} < \frac{1}{n^2}$$

E, SICCOME $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE, GRAZIE AL CR. DEL CONFRONTO CONVERGE ANCHE $\sum \frac{(n!)^{n!}}{(n^n)!}$.

$\boxed{37}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{a}{n}\right)}_{a_n}$ CONVERGE PER $a = \frac{1}{12}$

POSTO $x = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ SI HA:

$$\ln(\cos x) = \ln(1+(\cos x - 1)) = (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + o\left((\cos x-1)^3\right) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)^2 + o(x^6) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^6)\right) + o(x^6)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^6) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^6)$$

QUINDI:

$$a_n = \ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{a}{n} = \cancel{-\frac{1}{2\sqrt{n}}} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + \cancel{\frac{1}{2\sqrt{n}}} + \frac{a}{n} = \left(a - \frac{1}{12}\right)\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

DI CONSEGUENZA, SE $a \neq \frac{1}{12}$, $a_n \approx \left(a - \frac{1}{12}\right)\cdot\frac{1}{n}$ CHE È A SEGNO COSTANTE

E QUINDI $\sum a_n$ DIVERGE PER IL CR. DEL CONF. ASINTOTICO.

SE INVECE $a = \frac{1}{12}$ SI HA $a_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, DA CUI SEGUE CHE DEF. IN n

SI HA $|a_n| \le \frac{c}{n\sqrt{n}}$. QUINDI $\sum |a_n|$ CONVERGE E DUNQUE ANCHE $\sum a_n$.

$\boxed{44}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^a$ CONVERGE PER $a > 1$

$$1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 0$$

SI HA:

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1 - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e\left(e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right) =$$

$$= e\cdot\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \approx \frac{e}{2n}$$

QUINDI $a_n \approx \left(\frac{e}{2}\right)^a \cdot \frac{1}{n^a}$ E PERCIÒ CONVERGE PER $a > 1$.

---

45 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)^{a}$ CONVERGE PER $a>0$.

POICHÈ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ CONVERGE AD e, SI HA:

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\text{RESTO } n+1\text{-ESIMO DI }\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=R_{n+1}$$

PER OGNI FISSATO $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ SI HA:

$$\frac{(n+1)!}{k!}=\underbrace{\boxed{\frac{(n+1)(n)(n-1)\cdot\dots\cdot2\cdot1}{k\cdot(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}}}_{\leq 1}\cdot\frac{1}{(k-n-1)\cdot\dots\cdot2\cdot1}\leq\frac{1}{(k-n-1)(k-n-2)\cdot\dots\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{(k-n-1)!}$$

$$R_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{k!}\leq$$

POSTO $m=k-n-1$

$$\leq\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(k-n-1)!}=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}=\frac{e}{(n+1)!}$$

QUINDI:

$$a_n=\left(R_{n+1}\right)^{a}\leq\left(\frac{e}{(n+1)!}\right)^{a}=e^{a}\cdot\frac{1}{((n+1)!)^{a}}\leq\frac{1}{n^2}$$

$\forall a>0$ DEF IN n, VISTO CHE DEF IN n SI HA: $(n+1)!>n^{\frac{2}{a}}$

QUINDI $\sum a_n$ CONVERGE $\forall a>0$.

---

46 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{a}}}$ CONVERGE PER $a>1$

PER $0<a\leq1$ SI HA.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{a}}}\geq\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\geq\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{n}$$

QUINDI PER $0<a\leq1$ $\sum a_n$ CONVERGE PER IL CR. DEL CONFRONTO.

PER $a>1$ SI HA:

$$(n!)^{a}=\left(\left(n!\right)^{\sqrt{a}}\right)^{\sqrt{a}}>\left(n^n\right)^{\sqrt{a}}$$

PERCHÈ ESSENDO $\frac{1}{\sqrt{a}}<1$ VALE DEF. IN n LA DISUGUAGLIANZA: $n!>(n^n)^{\frac{1}{\sqrt{a}}}$ DIMOSTRATA NELLO SVOLGIMENTO DEL PROBLEMA **30**

DA CUI SEGUE:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{a}}}<\frac{1}{\sqrt[n]{(n^n)^{\sqrt{a}}}}=\frac{1}{n^{\sqrt{a}}}$$

MA $\sum\frac{1}{n^{\sqrt{a}}}$ CONVERGE PERCHÈ $a>1$ E QUINDI ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE.

---

47 STUDIARE AL VARIARE DI $a>0$ LA CONVERGENZA DI $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{a\,n\ln n}$

SI HA:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{a n \ln n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{a n \ln n} = e^{a n \ln n \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} =$$

$$= \left(e^{\ln n}\right)^{a n \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = n^{a n \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

MA:

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = n\left(\frac{1}{n+1} + \theta\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n\left(\frac{1}{n} + \theta\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \theta\left(\frac{1}{n}\right)$$

QUINDI:

$$n^{a n \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = n^{a\left(1+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = n^{a+\theta\left(\frac{1}{n}\right)} = n^a \cdot n^{\theta\left(\frac{1}{n}\right)} \approx n^a$$

PERCHÉ:

$$n^{-\frac{c}{n}} < n^{\theta\left(\frac{1}{n}\right)} < n^{\frac{c}{n}}$$

CIOÈ

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^c < n^{\theta\left(\frac{1}{n}\right)} < \left(\sqrt[n]{n}\right)^c$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

QUINDI $n^{\theta\left(\frac{1}{n}\right)} \to 1$

DI CONSEGUENZA:

$$a_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{a n \ln n} \approx \frac{1}{n^2} \cdot n^a = \frac{1}{n^{2-a}}.$$

MA ALLORA, VISTO CHE $\sum \frac{1}{n^{2-a}}$ CONVERGE SE E SOLO SE $2-a > 0$, LO STESSO FARÀ $\sum a_n$.

QUINDI GLI $a>0$ CHE LA FANNO CONVERGERE SONO GLI a TALI CHE $0<a<1$.
