Analisi Matematica (II modulo)- Exe. 12

8 e 10 Giugno 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

NEI CASI SEGUENTI CASI STUDIARE LA DIFFERENZIABILITÀ DELLE FUNZIONI PROPOSTE:

$\boxed{1}$ $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 y^n)}{x^2+y^2+\sin((xy)^n)} & \text{PER } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{PER } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$ AL VARIARE DI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$\boxed{2}$ $$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin\dfrac{1}{x+y} & \text{SE } x+y\neq 0 \\ 0 & \text{SE } x+y=0 \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\ln(1+y)-y^2-xy}{y} & \text{SE } y>0 \\ 0 & \text{SE } y\leq 0 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ $$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{y^2}} \sin\sqrt[4]{x^4+y^6} & \text{SE } y\neq 0 \\ 0 & \text{SE } y=0 \end{cases}$$

$\boxed{5}$ $$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan(x+y) & \text{SE } y\leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^\alpha} & \text{SE } y>0 \end{cases}$$ AL VARIARE DI $\alpha>0$.

$\boxed{6}$ $f(x,y) = \chi_\Omega(x,y)$ DOVE $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2<y<2x^2\}$

$\boxed{7}$ $f(x,y) = y\cdot\chi_\Omega(x,y)$ DOVE Ω È LO STESSO DI $\boxed{6}$.

8 SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ POSITIVAMENTE OMOGENEA DI GRADO $\alpha > 0$ E CONTINUA.
COME DEVE ESSERE α, SE VOGLIAMO CHE SIA DIFFERENZIABILE NELL'ORIGINE?

9 DATA $f(x,y) = \dfrac{\arctan x - \arctan y}{x - y}$, DIRE SE È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ A TUTTO $\mathbb{R}^2$.

10 ESIBIRE $f(x,y)$ DIFFERENZIABILE SU TUTTO $\mathbb{R}^2$ MA NON $C^1(\mathbb{R}^2)$.

11 MOSTRARE CHE SE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ È UN APERTO CONVESSO ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE CON ∇f LIMITATO, ALLORA f È LIPSCHITZIANA.
IL TEOREMA RIMANE VERO SE Ω E APERTO CONNESSO?

12 MOSTRARE CHE SE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ È APERTO CONNESSO ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ HA $\nabla f(x,y) = 0$ $\forall (x,y) \in \Omega$, ALLORA $f(x,y) =$ COSTANTE SU Ω.

13 SIA $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ TROVARE, SE ESISTE, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f_x(x,y) = \frac{1}{y^2}$ E $f_y(x,y) = \frac{1}{x^3}$. SE NON ESISTE, DIMOSTRARLO.

14 COME **13** MA CON $f_x(x,y) = \frac{x}{y}$ E $f_y(x,y) = \frac{y}{x}$.

15 QUANTE DIVERSE FUNZIONI OTTENGO FACENDO TUTTE LE POSSIBILI DERIVATE QUARTE DELLA FUNZIONE $f(x,y,z,u,v,w) = (xyzuvw)^{100}$.

16 COME IL PROB **15** MA CON $f(x,y,z,u,v,w) = (xyzuvw)^3$.