

Analisi Matematica 2 - 1A

Titolo nota

Scritto del 24 giugno 2020 - docente: Prof. E. Callegari - Univ. di Roma Tor Vergata - CdL in Matematica

SOLUZIONI

1 CALCOLARE $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^4+x} dx$

SVOLGIMENTO

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^4+x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{3}{x^4+x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^3(x^3+1)} 3x^2 dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{b^3} \frac{1}{y(y+1)} dy = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{b^3} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln y - \ln(y+1) \right]_1^{b^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{y}{1+y} \right]_1^{b^3} = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{b^3}{1+b^3} - \ln \frac{1}{2} \right) = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2 \end{aligned}$$

2 STUDIARE, AL VARIARE DI $\alpha > 0$, CONVERGENZA SEMPLICE E ASSOLUTA DI:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} - 1 \right)$$

SVOLGIMENTO

SVILUPPANDO IN $x=0$ $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ SI HA:

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{1+x} - 1 &= \left(\frac{1}{2} \right) x + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} \right) x^2 + o(x^2) = \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{2 \cdot 1} x^2 + o(x^2) = \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

QUINDI, SE INDICHIAMO CON a_n IL TERMINE n -ESIMO DELLA NOSTRA SERIE SI HA:

(1)
$$a_n = R\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

POSTO $b_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ SI HA CHE $\sum b_n$ CONVERGE GRAZIE A LEIBNIZ, QUINDI

$\sum a_n$ E $\sum (a_n - b_n)$ HANNO LO STESSO CARATTERE, BASTA DUNQUE STUDIARE LA SECONDA.

GRAZIE A (1) SI HA:

$$a_n - b_n = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \approx -\frac{1}{8} \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

SICCOME $-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}}$ È A SEGNO COSTANTE, POSSO APPLICARE IL CRITERIO

DEL CONFRONTO ASINTOTICO E DIRE CHE:

(2) $\sum (a_n - b_n)$ E $\sum -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}}$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

MA POICHÉ SAPPIAMO GIÀ CHE $\sum (a_n - b_n)$ HA LO STESSO CARATTERE DI $\sum a_n$,

POSSIAMO CONCLUDERE CHE $\sum a_n$ CONVERGE SE E SOLO SE $\sum -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}}$ CONVERGE,

COSA CHE ACCADE SE E SOLO SE $2\alpha > 1$, CIOÈ $\alpha > \frac{1}{2}$.

PER QUANTO RIGUARDA LA CONVERGENZA ASSOLUTA, BASTA OSSERVARE CHE:

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

E QUINDI, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO $\sum |a_n|$ HA LO STESSO

CARATTERE DI $\sum \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$ CHE CONVERGE SE E SOLO SE $\alpha > 1$.

RIASSUMENDO: LA SERIE CONVERGE SEMPLICEMENTE SE $\alpha > \frac{1}{2}$ E ASSOLUTAMENTE

SE $\alpha > 1$.

3 PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$f_n(x) = n \left(\sin \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sin \sqrt{x} \right)$$

a MOSTRARE CHE SE $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ ALLORA $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE SU $(0, +\infty)$.

b DIRE SE LA CONVERGENZA È UNIFORME SU $(0, 1]$, $[1, 2]$ E $[2, +\infty)$.

c CALCOLARE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx$

FACOLTATIVA → d CALCOLARE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$

(MOTIVARE OGNI RISPOSTA)

SVOLGIMENTO

a POSTO $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ SI HA:

$$f_n(x) = \frac{\sin \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sin \sqrt{x}}{\frac{1}{n}} = \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}$$

QUINDI, PER OGNI $x > 0$ SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = F'(x) = (\sin \sqrt{x})' = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

INVECE PER $x = 0$ SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \sqrt{\frac{1}{n}} - \sin 0}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \cdot \sqrt{n} = +\infty$$

QUINDI, POSTO $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, SI HA CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE SU $(0, +\infty)$.

b MOSTRIAMO CHE $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU $[a, +\infty)$ CON $a > 0$, MA NON SU $(0, 1]$.

INFATTI SU $(0, 1]$ $f(x)$ NON È LIMITATA MENTRE OGNI f_n LO È.

DI CONSEGUENZA:

$$\sup_{x \in (0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

QUINDI SU $(0, 1]$ $f_n \not\rightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

MOSTRIAMO INVECE CHE $\forall a > 0$ $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU $[a, +\infty)$ (E QUINDI ANCHE SU $[1, 2]$ E $[2, +\infty)$).

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ È LIPSCHITZIANA SU $[a, +\infty)$

VISTO CHE LA SUA DERIVATA:

$$f'(x) = -\frac{\sin \sqrt{x}}{4\sqrt{x}} - \frac{\cos \sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}$$

È LIMITATA SU $[a, +\infty)$.

$f'(x)$ È LIMITATA SU $[a, +\infty)$ PERCHÈ È CONTINUA SU $[a, +\infty)$ E INFINITESIMA PER $x \rightarrow +\infty$ E QUINDI SI PUÒ TROVARE $b > a$ TALE CHE SU $[b, +\infty)$ SIA $|f'(x)| \leq 1$ MENTRE SU $[a, b]$ È LIMITATA GRAZIE A WEIERSTRASS

OSSERVIAMO INOLTRE CHE, POSTO $F(x) = \sin \sqrt{x}$, SI HA $F'(x) = f(x)$ E

$$f_n(x) = \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = F'(\xi_x) = f(\xi_x) \quad \text{CON } x < \xi_x < x + \frac{1}{n}$$

COSTANTE DI LIPSCHITZ DI f SU $[a, +\infty)$

QUINDI $\forall x \in [a, +\infty)$ SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(\xi_x) - f(x)| \leq L_a \cdot |\xi_x - x| \leq L_a \cdot \frac{1}{n}$$

QUINDI, PER OGNI FISSATO $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SULL'INSIEME $[a, +\infty)$ SI HA:

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [a, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq L_a \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{PER } n \rightarrow +\infty$$

QUINDI $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU $[a, +\infty)$.

C POICHÉ $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU $[1, 2]$ SI PUÒ PASSARE AL

LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE OTTENENDO:

PERCHÉ $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = (\sin \sqrt{x})'$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \left[\sin \sqrt{x} \right]_1^2 = \sin \sqrt{2} - \sin 1$$

FACOLTATIVA

L STAVOLTA $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU $[0, 1]$, TUTTAVIA SI RIESCE

UGUALMENTE A DIMOSTRARE CHE $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$.

INFATTI, POSTO COME PRIMA $F(x) = \sin \sqrt{x}$, RICORDIAMO CHE:

(3)
$$f_n(x) = \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}$$

(4)
$$f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = F'(x)$$

(5)
$$F''(x) = f'(x) = -\frac{\sin \sqrt{x}}{4x} - \frac{\cos \sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}$$

SI NOTI CHE, GRAZIE A (5), SU $(0, 2]$ $F''(x) < 0$ E QUINDI $F(x)$ È STRETTAMENTE CONCAVA. INOLTRE $F(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE SU $(0, 2]$ GRAZIE A (4). DI CONSEGUENZA $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ E $\forall x \in (0, 2]$ SI HA:

$$f'(x) > \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} > 0$$

PER MONOTONIA SU $(0, 2]$

PER CONCAVITÀ SU $(0, 2]$

CIÒ È:

(6)
$$f(x) > f_n(x) > 0$$

SIAMO ORA PRONTI A MOSTRARE CHE:

(7)
$$\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx.$$

A TALE SCOPO $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $b \in (0, 1)$ ED $n_0 \in \mathbb{N} - \{0\}$ IN MODO CHE:

(8)
$$\int_0^b f(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

POSSIAMO FARLO PERCHÉ $\int_0^1 f(x) dx$ CONVERGE

(9)
$$E \quad n \geq n_0 \Rightarrow \int_b^1 |f_n(x) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

POSSIAMO FARLO PERCHÉ $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU $[b, 1]$

ORA, SE $n \geq n_0$, SI HA

$$\left| \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx =$$

PERCHÉ GRAZIE A (6) SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x) \leq f(x)$$

$$= \int_0^b |f_n(x) - f(x)| dx + \int_b^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq$$

$$\leq \int_0^b f(x) dx + \int_b^1 |f_n(x) - f(x)| dx <$$

GRAZIE A (8)

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

GRAZIE A (9)

QUINDI ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $\forall \varepsilon > 0$, DEFINITIVAMENTE IN n , SI HA:

$$\left| \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| < \varepsilon$$

CIOÈ CHE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

PER CONCLUDERE BASTA ORA CALCOLARE:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 F'(x) dx = F(1) - F(0) = \ln 1$$

9 DATO IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = (y^2 - 1)e^{x + \alpha y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

a RISOLVERLO PER $\alpha = 0$

FACOLTATIVA →

b DETTA $y(x)$ LA SUA SOLUZIONE PER $\alpha = 1$, TROVARE LO SVILUPPO DI TAYLOR FINO AL SECONDO ORDINE DI $y(x)$ NEL PUNTO $x = 0$

SVOLGIMENTO

a PER $\alpha = 0$ L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$y' = (y^2 - 1)e^x$$

CHE HA COME SOLUZIONI COSTANTI $y \equiv -1$ E $y \equiv 1$.

SE CON $y(x)$ INDICHIAMO LA SOLUZIONE TALE CHE $y(0)=0$, ALLORA, FINCHÉ ESISTE, NON PUÒ INTERSECCARE LE 2 SOL. COSTANTI E QUINDI SODDISFA:

$$-1 < y(x) < 1$$

QUINDI ANZICHÉ SCRIVERE CHE SODDISFA:

$$y'(x) = ((y(x))^2 - 1) e^x$$

POSSIAMO SCRIVERE:

$$\frac{2 \cdot y'(x)}{(y(x))^2 - 1} = 2e^x$$

CIOÈ:

$$\left(\ln \frac{1-y(x)}{1+y(x)} \right)' = (2e^x)'$$

PERCHÉ $\int \frac{2}{y^2-1} dy = \int \frac{1+y+1-y}{y^2-1} dy =$
 $= \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| =$
 $= \ln \frac{1-y}{1+y} \quad \left(\text{PER } -1 < y < 1 \right)$

DA CUI SEGUE:

$$\ln \frac{1-y(x)}{1+y(x)} = 2e^x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

MA POICHÉ $y(0)=0$, SI HA $C=-2$, QUINDI:

$$\frac{1-y(x)}{1+y(x)} = e^{2e^x-2}$$

CIOÈ

$$\frac{2}{1+y(x)} - 1 = e^{2e^x-2}$$

CIOÈ

$$y(x) = \frac{2}{1+e^{2e^x-2}} - 1$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE TALE $y(x)$ È SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY.

b

IL POLINOMIO DI TAYLOR DI $y(x)$ CERCATO È:

$$p(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2} y''(0) x^2$$

BASTERÀ DUNQUE CALCOLARE $y(0)$, $y'(0)$ E $y''(0)$.

IL DATO INIZIALE CI DICE CHE $y(0)=0$.

SI HA POI:

$$y'(x) = (y^2(x) - 1) e^{x+y(x)}$$

QUINDI

$$y'(0) = (y^2(0) - 1) e^{0+y(0)} = (0^2 - 1) e^{0+0} = -1$$

INFINE:

$$y''(x) = \left((y^2(x) - 1) e^{x+y(x)} \right)' = 2y'(x)y(x) e^{x+y(x)} + (y^2(x) - 1) e^{x+y(x)} \cdot (1 + y'(x))$$

QUINDI

$$\begin{aligned} y''(0) &= 2y'(0)y(0) \cdot e^{0+y(0)} + (y^2(0) - 1) e^{0+y(0)} \cdot (1 + y'(0)) = \\ &= 2 \cdot (-1) \cdot 0 \cdot e^{0+0} + (0^2 - 1) e^{0+0} \cdot (1 + (-1)) = 0 \end{aligned}$$

QUINDI:

$$p(x) = 0 + (-1)x + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 = -x$$

5 PER OGNI $(x,y) \neq (0,0)$ DEFINIAMO $f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^4 + y^8)(x^8 + y^4)}$, CON $\alpha > 0$ E $\beta > 0$.

a MOSTRARE CHE SE $\alpha=2$ E $\beta=7$ ALLORA $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ NON ESISTE

b MOSTRARE CHE SE $\alpha=7$ E $\beta=3$ ALLORA $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

FACOLTATIVA **c** IN GENERALE DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, QUANTO VALE $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ AL VARIARE DI $\alpha > 0$ E $\beta > 0$.

SVOLGIMENTO

PREMESSA: SICCOME $f(x,0)$ E $f(0,y)$ SONO IDENTICAMENTE NULLE, SE IL LIMITE ESISTE È NECESSARIAMENTE ZERO.

a MOSTRIAMO CHE:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^2 \cdot |y|^7}{(x^4 + y^8)(x^8 + y^4)} \text{ NON ESISTE.}$$

INFATTI RESTRINGENDO f ALL'INSIEME $\Gamma = \{(x,y) \mid x=y^2, y>0\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Gamma}} \frac{|x|^2 \cdot |y|^7}{(x^4 + y^8)(x^8 + y^4)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^4 \cdot y^7}{2y^8 \cdot (y^4 + y^4)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{11}}{y^{12} + o(y^{12})} = +\infty$$

QUINDI IL LIMITE NON PUÒ ESSERE ZERO E PERCIÒ, IN BASE ALLA PREMESA NON ESISTE.

b SI HA:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^2 \cdot |y|^3}{(x^4+y^8)(x^8+y^4)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^8}}_{\text{LIMITATA}} \cdot \underbrace{\frac{(x^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^4)^2 + (y^2)^2}}_{\text{LIMITATA}} \cdot \underbrace{|x|}_{\downarrow 0} = 0$$

PERCHÈ: $\sup \left\{ \frac{(x^4)^{\frac{1}{2}} (y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^4)^2 + (y^2)^2} \mid (x,y) \neq (0,0) \right\} = \sup \left\{ \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}}{a^2 + b^2} \mid a \geq 0, b \geq 0 \right\} =$

PERCHÈ

È
OMOGENEA DI
GRADO ZERO,
VISTO CHE $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

$$= \sup \left\{ \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}}{a^2 + b^2} \mid a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 = 1 \right\} = M < +\infty$$

PERCHÈ È CONTINUA
E È COMPATTO

c PER MOTIVI DI SIMMETRIA BASTA STUDIARE IL CASO $\boxed{\alpha \geq \beta > 0}$.

SI VEDE SUBITO CHE DEVE ESSERE $\alpha > 4$, ALTRIMENTI, SE $\alpha \leq 4$ SI HA

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y>0}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|^{\alpha+\beta}}{x^{8+\alpha}(x^4)} \neq 0$$

PERCHÈ $\alpha+\beta \leq 2 \leq 8$

È ANCHE IMMEDIATO COSTATARE CHE SE $\alpha \geq \beta > 4$ IL LIMITE È ZERO PERCHÈ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^8}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{y^4}{x^8+y^4}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|x|^{\alpha-4}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{|y|^{\beta-4}}_{\downarrow 0} = 0$$

RIMANE DA STUDIARE IL CASO $\alpha > 4 \geq \beta > 0$.

MOSTRIAMO CHE IN TAL CASO IL LIMITE ESISTE (E VALE ZERO) SE E SOLO SE $\alpha+2\beta > 12$.

IN TAL CASO INFATTI:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^8}}_{\text{LIMITATO}} \cdot \underbrace{\frac{(x^2)^{4-\beta} \cdot |y|^\beta}{(x^2)^4 + y^4}}_{\text{LIMITATO PERCHÈ } \frac{a^{4-\beta} \cdot b^\beta}{a^4 + b^4} \text{ È OMOGENEA DI GR. ZERO}} \cdot \underbrace{|x|^{\alpha-4-8+2\beta}}_{\downarrow 0} = 0$$

PERCHÈ $\alpha+2\beta > 12$

VICEVERSA, SE $\alpha + 2\beta \leq 12$, RESTRINGENDOSI A $y = x^2$, SI HA

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|^\alpha \cdot (x^2)^\beta}{(x^4 + x^8)(x^8 + x^8)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|^{\alpha+2\beta}}{x^{12} + o(x^{12})} \neq 0$$

PERCHÉ $\alpha + 2\beta \leq 12$

RIASSUMENDO NEL CASO $\alpha \geq \beta > 0$ IL LIMITE ESISTE (E VALE ZERO)

SE E SOLO SE $\alpha + 4\beta > 12$.

SIMMETRICAMENTE, SE $\beta \geq \alpha > 0$, IL LIMITE ESISTE (E VALE ZERO)

SE E SOLO SE $\beta + 4\alpha > 12$.

RIPORTIAMO QUI DI SEGUITO IL DIAGRAMMA CHE RIASSUME LA CASISTICA

