# Analisi Matematica 2 - 1A

Titolo nota

Scritto del 24 giugno 2020 - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata*** - CdL in ***Matematica***

**1** CALCOLARE $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^4+x}\,dx$. VALE 5 PUNTI

**2** STUDIARE, AL VARIARE DI $\alpha>0$, CONVERGENZA SEMPLICE E ASSOLUTA DI:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}-1\right)$$

VALE 7 PUNTI

**3** PER OGNI $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ SIA $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$f_n(x)=n\left(\sin\sqrt{x+\tfrac{1}{n}}-\sin\sqrt{x}\right)$$

VALGONO 7 PUNTI

**a** MOSTRARE CHE SE $f(x)=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ ALLORA $f_n\to f$ PUNTUALMENTE SU $(0,+\infty)$.

**b** DIRE SE LA CONVERGENZA È UNIFORME SU $(0,1]$, $[1,2]$ E $[2,+\infty)$.

**c** CALCOLARE $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^2 f_n(x)\,dx$

FACOLTATIVA **d** CALCOLARE $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$

(MOTIVARE OGNI RISPOSTA)

**4** DATO IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y'=(y^2-1)e^{x+\alpha y} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

VALE 5 PUNTI **a** RISOLVERLO PER $\alpha=0$

FACOLTATIVA **b** DETTA $y(x)$ LA SUA SOLUZIONE PER $\alpha=1$, TROVARE LO SVILUPPO DI TAYLOR FINO AL SECONDO ORDINE DI $y(x)$ NEL PUNTO $x=0$.

**5** PER OGNI $(x,y)\neq(0,0)$ DEFINIAMO $f(x,y)=\dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{(x^4+y^8)(x^8+y^4)}$, CON $\alpha>0$ E $\beta>0$.

VALGONO 6 PUNTI

**a** MOSTRARE CHE SE $\alpha=2$ E $\beta=7$ ALLORA $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NON ESISTE

**b** MOSTRARE CHE SE $\alpha=7$ E $\beta=3$ ALLORA $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

FACOLTATIVA **c** IN GENERALE DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, QUANTO VALE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ AL VARIARE DI $\alpha>0$ E $\beta>0$.