

ANALISI MATEMATICA 2

PROVA SCRITTA DEL 18/09/2020

1 SIA $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1} + x^2}$.

4 PUNTI → **a** CALCOLARE $\int_{\frac{3}{4}}^{+\infty} f(x) dx$

3 PUNTI → **b** SE, PER OGNI $x > 0$ PONIAMO $F(x) = \int_{\frac{3}{4}}^x f(t) \cdot \cos\left(\frac{t}{4}\right) dt$,
QUANTE SONO LE SOLUZIONI POSITIVE DELL'EQUAZIONE $F(x) = 0$?

2 SIA (a_n) DEFINITA PER RICORRENZA NEL MODO SEGUENTE:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = f(a_n) \text{ PER OGNI } n \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases}$$

3 PUNTI → **a** NEL CASO $f(x) = \frac{1}{2}x$ TROVARE ESPLICITAMENTE a_n
E STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum a_n$.

4 PUNTI → **b** NEL CASO $f(x) = \frac{1}{2} \arctan x$ STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum a_n$.

FACOLTATIVO → **c** COME **b** MA CON $f(x) = \arctan x$.

3 PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ DEFINIAMO $f_n(x) = \chi_A\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$,
DOVE $A \subset \mathbb{R}$ E χ_A INDICA LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA.
STUDIARE CONVERGENZA PUNTUALE SU $\mathbb{R}$ E UNIFORME SU
 $[-1, 0)$, $[0, \frac{1}{2}]$ E $\mathbb{R}$ NEI SEGUENTI CASI:

a $A = (0, +\infty)$

5 PUNTI

b $A = \mathbb{Z}$

3 PUNTI

c $A = \mathbb{Q}$

FACOLTATIVO

4

a

TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE:

5 PUNTI

$$y''' - 3y' + 2y = (3x+4)e^x$$

b

TROVARE (SE ESISTE), UN'EQUAZIONE DEL TIPO

FACOLTATIVO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = (3x+4)e^x$$

CON $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, IN MODO CHE ABBIAM TRA LE SUE SOLUZIONI LA FUNZIONE:

$$y(x) = \frac{1}{8} x^2 e^x - \frac{3}{2} x e^{-x}$$

5

DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, PER QUALI $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ È DIFFERENZIABILE

5 PUNTI

LA FUNZIONE:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{PER } x > 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SOLUZIONI

1 a) SI HA:

$$\int_{\frac{3}{4}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\frac{3}{4}}^b \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}+x^2} dx =$$

$x = \operatorname{sh} t$

PERCHÉ:

$$x = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$\Updownarrow$

$$t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(b + \sqrt{b^2+1})}{\ln 2} - \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t + \operatorname{sh}^2 t} dt \right]_{\ln 2}$$

$$c = \ln(b + \sqrt{b^2+1})$$

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\frac{2(e^t + e^{-t})}{e^{2t} - e^{-2t} + e^{2t} + e^{-2t} - 2} dt \right]_{\ln 2}^c$$

$$\frac{u^2+1}{u^2(u^2-1)} = \frac{2u^2+1-u^2}{u^2(u^2-1)} =$$

$$= \frac{2}{u^2-1} - \frac{1}{u^2} =$$

$$= \frac{1+u+1-u}{(u+1)(u-1)} - \frac{1}{u^2} =$$

$$= \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u^2}$$

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^c \frac{e^{2t}+1}{e^{2t}(e^{2t}-1)} e^t dt =$$

$u = e^t$

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^{e^c} \frac{u^2+1}{u^2(u^2-1)} du =$$

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^{e^c} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u^2} \right) du =$$

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\left[\ln \frac{u-1}{u+1} \right]_2^{e^c} + \left[\frac{1}{u} \right]_2^{e^c} \right) = \ln 3 - \frac{1}{2}$$

b) INTANTO, $f(x)$ È CRESCENTE SU $(0, 2\pi)$, PERCHÉ

$$f'(x) = f(x) \cos\left(\frac{x}{4}\right) > 0 \quad \text{SU } (0, 2\pi).$$

INOLTRE:

$$F\left(\frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} f(t) \cos\left(\frac{t}{4}\right) dt = 0$$

QUINDI SU $(0, 2\pi)$ L'UNICA SOL. DI $F(x) = 0$ È $x = \frac{3}{4}$.

OSSERVIAMO ORA CHE:

$$F(2\pi) = \int_{\frac{3}{4}}^{2\pi} f(t) \cos\left(\frac{t}{4}\right) dt \geq \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4\pi}{3}} f(t) \cos\left(\frac{t}{4}\right) dt \geq \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4\pi}{3}} f(t) dt$$

PERCHÉ SU $(0, \frac{4\pi}{3})$
SI HA $\cos \frac{t}{4} \geq \frac{1}{2}$

OPERANDO GLI STESSI CAMBI DI VARIABILE DEL PUNTO [a] SI HA:

$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4\pi}{3}} f(t) dt = \dots = \int_2^{\frac{4}{3}\pi + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 + 1}} \frac{u^2 + 1}{u^2(u^2 - 1)} du \geq \int_2^8 \frac{u^2 + 1}{u^2(u^2 - 1)} du =$$

PERCHÉ
 $\frac{4}{3}\pi + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 + 1} > 8$

$$= \dots = \left[\ln \frac{u-1}{u+1} \right]_2^8 + \left[\frac{1}{u} \right]_2^8 = \ln \frac{7}{3} - \frac{3}{8}$$

QUINDI SI OTTIENE:

$$F(2\pi) \geq \frac{1}{2} \left(\ln \frac{7}{3} - \frac{3}{8} \right)$$

D'ALTRA PARTE, SE $x > 2\pi$, SI HA

$$\begin{aligned} |F(x) - F(2\pi)| &= \left| \int_{2\pi}^x f(t) \cos\left(\frac{t}{4}\right) dt \right| \leq \int_{2\pi}^x |f(t) \cos\left(\frac{t}{4}\right)| dt \leq \\ &\leq \int_{2\pi}^x f(t) dt \leq \int_{2\pi}^{+\infty} f(t) dt \end{aligned}$$

CON CALCOLI IDENTICI A QUELLI DELLA PARTE [a] SI HA:

$$\int_{2\pi}^{+\infty} f(t) dt = \dots = \int_{\frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi)^2+1}}}^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^2(u^2-1)} du \leq \int_{12}^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^2(u^2-1)} du =$$

$$= \dots = \left[\ln \frac{u-1}{u+1} \right]_{12}^{+\infty} + \left[\frac{1}{u} \right]_{12}^{+\infty} = \ln \frac{13}{11} - \frac{1}{12}$$

QUINDI, SE $x > 2\pi$, SI HA:

$$F(x) = F(2\pi) + F(x) - F(2\pi) \geq F(2\pi) - |F(x) - F(2\pi)| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(\ln \frac{7}{3} - \frac{3}{8} \right) - \left(\ln \left(\frac{13}{11} \right) - \frac{1}{12} \right) > \dots > 0$$

QUINDI SU $[2\pi, +\infty)$ NON C'È ALCUNA SOLUZIONE DI $F(x) = 0$.
 QUINDI L'UNICA SOLUZIONE È $x = \frac{3}{4}$.

2 **a** SI DIMOSTRA SUBITO PER INDUZIONE CHE

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{PER } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

INFATTI $a_1 = 1$ E, SE $a_k = \frac{1}{2^{k-1}}$ ALLORA:

$$a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}$$

QUINDI:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \quad (\text{È UNA SERIE GEOMETRICA})$$

b INTANTO (a_n) È A TERMINI POSITIVI, PERCHÉ $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$.
 INOLTRE PER $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} \arctan(a_n)}{a_n} \leq \frac{\frac{1}{2} a_n}{a_n} = \frac{1}{2}$$

QUINDI $\sum a_n$ CONVERGE PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO.

C MOSTRIAMO CHE, PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA:

(1) $\frac{1}{n} \leq a_n \leq 1$

PROCEDIAMO PER INDUZIONE.

PER $n=1$ È GIÀ NOTO.

POSTO CHE (1) VALGA PER $n=k$, USANDO LA MONOTONIA DI $\arctan(x)$ SI OTTIENE:

$$\arctan \frac{1}{k} \leq \arctan a_k \leq \arctan 1$$

CIOÈ

(2) $\arctan \frac{1}{k} \leq a_{k+1} \leq \frac{\pi}{4} < 1$

MA OSSERVIAMO CHE:

PERCHÈ PER $x \geq 0$ SI HA:

$$\arctan x \geq x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\arctan \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{3k^3} \geq \frac{1}{k+1}$$

BASTA DIMOSTRARE CHE: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{3k^3}$

CIOÈ CHE: $\frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{3k^3}$

CIOÈ CHE: $k(k+1) \leq 3k^3$

CIOÈ CHE $k+1 \leq 3k^2$

CHE PER $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ È OVVIO

DI CONSEGUENZA LA (2) DIVENTA:

$$\frac{1}{k+1} \leq a_{k+1} \leq 1$$

QUINDI LA (1) VALE SEMPRE E, DI CONSEGUENZA, $\sum a_n$ DIVERGE PER CONFRONTO CON $\sum \frac{1}{n}$.

3 a SE $x \geq 0$ ALLORA $\chi_{(0,+\infty)}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 1$ PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

INVECE, SE $x < 0$, ALLORA DEFINITIVAMENTE IN n SI HA $x + \frac{\sqrt{2}}{n} < 0$
E QUINDI $\chi_{(0,+\infty)}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0$.

OTTENIAMO PERCIÒ:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{(0,+\infty)}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x < 0 \\ 1 & \text{SE } x \geq 0 \end{cases}$$

CIOÈ:

$$\chi_{(0,+\infty)}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \rightarrow \chi_{[0,+\infty)}(x) = f(x) \quad \text{PUNTUALMENTE, SU } \mathbb{R}.$$

PER QUANTO RIGUARDA LA CONVERGENZA UNIFORME, MOSTRIAMO CHE SU $[0, \frac{1}{2}]$ C'È, MENTRE SU $[-1, 0)$ E SU $\mathbb{R}$ NO.

INFATTI SU $[0, \frac{1}{2}]$, SIA f SIA TUTTE LE f_n SONO FUNZIONI COSTANTI UGUALI A 1. QUINDI $d(f_n, f) = 0$ PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

INVECE, SU $[-1, 0)$ SI HA, SEMPRE $d(f_n, f) = 1$, VISTO CHE PER $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{n}, 0)$ SI HA $f_n(x) = 1$ E $f(x) = 0$.

OVVIAMENTE, SE NON C'È CONV. UNIFORME SU $[-1, 0)$ NON C'È NEMMENO SU $\mathbb{R}$.

b PER OGNI FISSATO $x \in \mathbb{R}$ C'È AL MASSIMO UN INDICE $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ TALE CHE $f_n(x) = 1$. INFATTI, SE PER ASSURDO CE NE FOSSERO ALMENO 2, DICIAMO $\bar{n}$ ED $\tilde{n}$, CON $\bar{n} \neq \tilde{n}$, ALLORA

$$f_{\bar{n}}(x) = 1 \Rightarrow \chi_{\mathbb{Z}}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{\bar{n}}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\sqrt{2}}{\bar{n}} \in \mathbb{Z}$$

E, ANALOGAMENTE,

$$f_{\tilde{n}}(x) = 1 \Rightarrow \chi_{\mathbb{Z}}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{\tilde{n}}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\sqrt{2}}{\tilde{n}} \in \mathbb{Z}$$

DI CONSEGUENZA:

$$\left(x + \frac{\sqrt{2}}{\bar{n}}\right) - \left(x + \frac{\sqrt{2}}{\tilde{n}}\right) \in \mathbb{Z}$$

CIOÈ:

$$\frac{\sqrt{2}}{\bar{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\tilde{n}} \in \mathbb{Z}$$

MA CIÒ È IMPOSSIBILE SE $\bar{n}$ ED $\tilde{n}$ SONO INTERI POSITIVI DIVERSI, PERCHÈ

$$\frac{\sqrt{2}}{\bar{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\tilde{n}} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\bar{n}} - \frac{1}{\tilde{n}} \right) \notin \mathbb{Q}$$

DI CONSEGUENZA, PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Z}} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{n} \right) = 0$$

CIOÈ $\chi_{\mathbb{Z}} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{n} \right) \rightarrow 0$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

SU $[0, \frac{1}{2}]$ LA CONVERGENZA È ANCHE UNIFORME PERCHÈ

SE $n \geq 3$ E $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ALLORA $x + \frac{\sqrt{2}}{n} \in [\frac{\sqrt{2}}{n}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{n}] \subset (0, 1)$

E QUINDI $\chi_{\mathbb{Z}} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{n} \right) = 0$, CIOÈ f_n È IDENTICAMENTE NULLA

SU $[0, \frac{1}{2}]$ NON APPENA $n \geq 3$. DA CIÒ LA CONVERGENZA UNIFORME.

INVECE SU $[-1, 0)$ SI HA:

$$d(f_n, 0) \geq |f_n(-\frac{\sqrt{2}}{n}) - 0| = |1 - 0| = 1$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

QUINDI $f_n \not\rightarrow 0$ UNIFORMEMENTE SU $[0, -1)$ E, A MAGGIOR RAGIONE, NEMMENO SU $\mathbb{R}$.

[C] IN MODO DEL TUTTO ANALOGO A QUANTO FATTO NEL PUNTO **[B]**, SI DIMOSTRA CHE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ C'È AL MASSIMO UNA DELLE FUNZIONI f_n TALE CHE $f_n(x) = 1$. DI CONSEGUENZA $f_n \rightarrow 0$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

LA CONVERGENZA PERÒ NON È UNIFORME SU ALCUN INTERVALLO NON DEGENERE (a,b) , PERCHÉ, PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, L'INSIEME:

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) = 1\}$$

È DENSO IN $\mathbb{R}$, IN QUANTO SI HA:

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q}\right\} = \left\{q - \frac{\sqrt{2}}{n} \mid q \in \mathbb{Q}\right\}$$

E SAPPIAMO GIÀ CHE $\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$.

4 2 IL POLINOMIO CARATTERISTICO DELL'EQUAZIONE È:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = \dots = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$$

PER CUI LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$(3) \quad Y(x) = \alpha e^{-2x} + (\beta x + \gamma) e^x \quad \text{CON } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

SICCOME IL TERMINE NON OMOGENEO È:

$$(3x + 4) e^x$$

E $\lambda = 1$ È RADICE DI $P(\lambda)$ CON MOLTEPLICITÀ 2,
CERCHIAMO ORA UNA SOL. PARTICOLARE DELLA NON
OMOGENEA DEL TIPO:

$$(4) \quad Y_0(x) = x^2 (Ax + B) e^x = (Ax^3 + Bx^2) e^x$$

DERIVANDO RIPETUTAMENTE LA (4) SI OTTIENE:

$$Y_0'(x) = (Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx) e^x$$

$$y_0''(x) = (Ax^3 + (6A+B)x^2 + (6A+4B)x + 2B)e^x$$

$$y_0'''(x) = (Ax^3 + (9A+B)x^2 + (18A+6B)x + 6A+6B)e^x$$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE, I TERMINI CON x^3 E x^2 SCOMPAIONO E SI OTTIENE:

$$(18A \cdot x + 6A + 6B)e^x = (3x + 4)e^x$$

QUINDI DEVE ESSERE:

$$\begin{cases} 18A = 3 \\ 6A + 6B = 4 \end{cases}$$

CHE HA SOLUZIONI $A = \frac{1}{6}$ E $B = \frac{1}{2}$.

QUINDI:

$$y_0(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) e^x$$

E PERCIÒ LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = \alpha e^{-2x} + (\beta x + \gamma)e^x + \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{13}{24}x^2 \right) e^x \quad \text{CON } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

b DOBBIAMO TROVARE UN OPERATORE DIFFERENZIALE $\mathcal{L}$ A COEFFICIENTI COSTANTI TALE CHE:

$$(5) \quad \mathcal{L} \left(\frac{1}{8}x^2 e^x - \frac{3}{2}x e^{-x} \right) = (3x + 4)e^x$$

CIOÈ TALE CHE

$$(6) \quad \mathcal{L} \left(\frac{1}{8}x^2 e^x \right) - \mathcal{L} \left(\frac{3}{2}x e^{-x} \right) = (3x + 4)e^x$$

SICCOME $\mathcal{L}$ HA LA PROPRIETÀ CHE $\mathcal{L}(P(x)e^{\lambda x}) = Q(x)e^{\lambda x}$
LA (6) EQUIVALE ALLE 2 CONDIZIONI

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{8}x^2e^x\right) = (3x+4)e^x \quad \text{E} \quad \mathcal{L}\left(\frac{3}{2}xe^{-x}\right) = 0$$

DA CUI SI DEDUCE CHE IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $\mathcal{L}$
HA LA RADICE $\lambda=1$ CON MOLTEPLICITÀ 1 E $\lambda=-1$ CON
MOLTEPLICITÀ 2. QUINDI $\mathcal{L}$ È DELLA FORMA:

$$(7) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}' \circ (D-I) \circ (D+I)^2$$

DOVE D È L'OPERATORE DERIVATA, I È L'OPERATORE
IDENTITÀ E $\mathcal{L}'$ È UN OPERATORE DA DETERMINARE.
OSSERVIAMO CHE:

$$(D-I)(D+I)^2\left(\frac{3}{2}xe^{-x}\right) = (D-I)(0) = 0$$

E CHE:

$$(D-I)(D+I)^2\left(\frac{1}{8}x^2e^x\right) = (D+I)^2\left(\frac{x}{4}e^x\right) = (D+I)\left(\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^x\right) = (x+1)e^x$$

QUINDI, GRAZIE ALLA (7), LA (5) DIVENTA:

$$(8) \quad \mathcal{L}'\left((x+1)e^x\right) = (3x+4)e^x$$

VISTO CHE $(x+1)$ E $(3x+4)$ HANNO GRADO 1, CERCHIAMO $\mathcal{L}'$
DI ORDINE 1 CHE SODDISFI (8), CIOÈ DELLA FORMA:

$$\mathcal{L}' = (aD + bI) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

UN TALE $\mathcal{L}'$ SODDISFA (8) SE E SOLO SE:

$$(aD + bI)\left((x+1)e^x\right) = (3x+4)e^x$$

CIOÈ:

$$\left((a+b)x + (2a+b) \right) e^x = (3x+4)e^x$$

DA CUI SEGUE:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=4 \end{cases}$$

CHE HA SOLUZIONI $a=1$ E $b=2$.

DA CUI SEGUE $\mathcal{L}' = (D+2I)$ E QUINDI:

$$\mathcal{L} = (D+2I) \circ (D-I) \circ (D+I)^2$$

QUINDI L'EQ. CERCATA È:

$$y^{(4)} + 3y''' + y'' - 3y' - 2y = (3x+4)e^x$$

5 PER PRIMA COSA, IN TUTTI I PUNTI (x,y) AVENTI $x \neq 0$, f È DIFFERENZIABILE PERCHÈ COMPOSIZIONE DI FUNZIONI C^1 .
RIMANE DA STUDIARE LA DIFFERENZIABILITÀ IN PUNTI DEL TIPO $(0, y_0)$.
MOSTREMO CHE f È DIFFERENZIABILE IN $(0, y_0)$ SE E SOLO SE y_0 STA NELL'INSIEME $A = \{0\} \cup \left\{ \pm \frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$.

SE $y_0 \notin A$ SI HA:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \cdot \sqrt{h^2 + y_0^2} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + y_0^2}}}{h} = |y_0| \cdot \sin \frac{1}{|y_0|} \neq 0$$

PERCHÈ $y_0 \notin A$

INOLTRE

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

QUINDI, SE $y_0 \notin A$ $f_x(0, y_0)$ NON ESISTE, QUINDI f NON È DERIVABILE E QUINDI NEMMENO DIFFERENZIABILE.

SE INVECE $y_0 \in A$ SI HA:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(0,y_0)}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}} = \begin{cases} x \leq 0 & = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{0}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \\ x > 0 & = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{x \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}} = \end{cases}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}}}_{\text{LIMITATO}} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\downarrow 0} \right) = 0$$

SE $y_0 = 0$ PERCHÉ:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\text{LIMITATO}} \right) = 0$$

SE $y_0 = \pm \frac{1}{k\pi}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = |y_0| \cdot \sin \frac{1}{|y_0|} = 0$$

← PERCHÉ $y_0 = \pm \frac{1}{k\pi}$

QUINDI NEI PUNTI DEL TIPO $(0, y_0)$, CON $y_0 \in A$, $f(x, y)$ È DIFFERENZIABILE E $\nabla f(0, y_0) = (0, 0)$.