# Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 2

Titolo nota

Prova simulata su: Integrali e Integrali Impropri - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata***

# SOLUZIONI

**NOTA:** RIPORTIAMO LE SOLUZIONI SOLO DEI PROBLEMI $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ E $\boxed{5}$ PERCHÈ DEI PROBLEMI $\boxed{2}$ E $\boxed{4}$ ABBIAMO LINKATO LA VIDEO-SOLUZIONE NELLA PAGINA DEL CORSO.

---

$\boxed{1}$ CALCOLARE $\int_1^2 \frac{6x^2+4x+2}{2x^3+2x^2+x}\,dx$

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

$$\int_1^2 \frac{6x^2+4x+2}{2x^3+2x^2+x}\,dx = \int_1^2 \frac{6x^2+4x+1}{2x^3+2x^2+x} + \frac{1}{2x^3+2x^2+x}\,dx = \overbrace{\int_1^2 \frac{6x^2+4x+1}{2x^3+2x^2+x}\,dx}^{1} + \overbrace{\int_1^2 \frac{1}{2x^3+2x^2+x}\,dx}^{2}$$

$$1 = \int_1^2 \frac{(2x^3+2x^2+x)'}{2x^3+2x^2+x}\,dx = \left[\ln(2x^3+2x^2+x)\right]_1^2 = \ln 26 - \ln 5$$

$$2 = \int_1^2 \frac{1}{x(2x^2+2x+1)}\,dx = \int_1^2 \frac{2x^2+2x+1-2x^2-2x}{x(2x^2+2x+1)}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{2x+2}{2x^2+2x+1}\,dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{4x+2+2}{2x^2+2x+1}\,dx =$$

$$= \left[\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} + \frac{2}{2x^2+2x+1}\,dx =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\left[\ln(2x^2+2x+1)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{4x^2+4x+1+1}\,dx =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5) - \int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2+1}\cdot(2x+1)'\,dx =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 13 + \frac{1}{2}\ln 5 - \left[\arctan(2x+1)\right]_1^2 =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 13 + \frac{1}{2}\ln 5 - \arctan 5 + \arctan 3$$

QUINDI IL RISULTATO È:

$$1 + 2 = -\frac{1}{2}\ln 5 + 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 13 - \arctan 5 + \arctan 3$$

---

**2** DATA $f(x)=\dfrac{\sqrt{15+x^{\alpha}}-\sqrt{x^{\alpha}}}{\sqrt{3+\sqrt{1+x}}}$

**(a)** CALCOLARE $\int_0^{15} f(x)\,dx$ PER $\alpha=0$

**(b)** STUDIARE LA CONVERGENZA DI $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ AL VARIARE DI $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$ (VEDI IL VIDEO LINKATO NELLA PAGINA DEL CORSO)

---

**3** DIRE SE $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x-e^{\frac{1}{x}}\right)dx$ CONVERGE

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

PER $x\to+\infty$ SI HA:

PERCHÉ $x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\simeq\frac{1}{x}\to 0$

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1+x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

QUINDI, INDICANDO CON $f(x)$ LA FUNZIONE INTEGRANDA, SI HA:

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x-e^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\approx-\frac{1}{2x^3}$$

SI NOTI CHE $-\frac{1}{2x^3}$ È A SEGNO COSTANTE SU $[1,+\infty)$ QUINDI ANCHE $f(x)$ È DEFINITIVAMENTE A SEGNO COSTANTE PER $x\to+\infty$. POSSO QUINDI APPLICARE IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO E DIRE CHE IL CARATTERE DI $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ È UGUALE A QUELLO DI $\int_1^{+\infty}-\frac{1}{2x^3}\,dx$, CHE SAPPIAMO CONVERGERE.

---

**4** DATA $F(x)=\displaystyle\int_2^x\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t\sqrt{t^2+t-2}}\,dt$, DOPO AVERNE DETERMINATO IL DOMINIO, STUDIARNE MONOTONIA, CONVESSITÀ ED EVENTUALI ASINTOTI.

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$ (VEDI VIDEO LINKATO NELLA PAGINA DEL CORSO)

---

**5** DIMOSTRARE O CONFUTARE LA SEGUENTE AFFERMAZIONE: "SE $f, g, h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ SONO TALI CHE $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ PER OGNI $x \in [0, +\infty)$ ED INOLTRE SONO CONVERGENTI SIA $\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ CHE $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$, ALLORA ANCHE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE"

(ATTENZIONE CHE $f, g, h$ <u>NON</u> SONO A SEGNO COSTANTE)

SVOLGIMENTO L'AFFERMAZIONE È **VERA**.

DALLA DISUGUAGLIANZA:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [0, +\infty)$$

SEGUE OVVIAMENTE:

(1) $$0 \leq f(x) - h(x) \leq g(x) - h(x) \qquad \forall x \in [0, +\infty)$$

MA SICCOME $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ E $\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ CONVERGONO, SI HA CHE

(2) $$\int_0^{+\infty} g(x) - h(x)\,dx \quad \text{CONVERGE}$$

GRAZIE A (1) E (2) POSSO APPLICARE IL CRITERIO DEL CONFRONTO E OTTENERE:

$$\int_0^{+\infty} f(x) - h(x)\,dx \quad \text{CONVERGE}$$

MA SICCOME:

$$f(x) = \big(f(x) - h(x)\big) + h(x)$$

DAL FATTO CHE $\int_0^{+\infty} f(x) - h(x)\,dx$ E $\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ CONVERGONO SEGUE CHE ANCHE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE.