Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 7

Titolo nota

Prova simulata sull'intero programma - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma **Tor Vergata**

1 SIANO $f, F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ DEFINITE DA $f(x) = \arctan x^2$ E $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a DETERMINARE L'ORDINE DI INFINITESIMO DI $F(x)$ PER $x \to 0^+$.

b DIRE SE PER $x \to +\infty$ $F(x)$ HA UN ASINTOTO OBLIQUO.

c $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ DEFINIAMO $f_n(x) = f(nx)$; STUDIARE LA CONVERGENZA UNIFORME DI (f_n) SUGLI INSIEMI $[1,+\infty)$, $[0,+\infty)$ E $(0,+\infty)$.

d $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ DEFINIAMO $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$; STUDIARE LA CONVERGENZA UNIFORME DI (F_n) SU $[0,+\infty)$.

2 STUDIARE, AL VARIARE DI $\alpha > 0$, CONVERGENZA SEMPLICE E ASSOLUTA DI

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$$

3 DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = f\left(\dfrac{e^y - 2}{e^y}\right) \cdot e^x \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

a TROVARNE LA SOLUZIONE NEL CASO CHE f SIA LA FUNZIONE IDENTITÀ, CIOÈ $f(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

b NEL CASO $f(t) = \sin t$, DIRE SE LA SOL. È PROLUNGABILE FINO A $-\infty$ E, IN CASO AFFERMATIVO, DIRE SE $y = \ln 2$ È ASINTOTO ORIZZONTALE OPPURE NO.

4 DATA

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha + \sin y^2}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|xy|}} & \text{PER } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{PER } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a STUDIARE LA DIFFERENZIABILITÀ IN $(0,0)$ AL VARIARE DI $\alpha > 0$.

b PER $\alpha = 2$ CALCOLARE $f_x(x,y)$ IN OGNI $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ IN CUI ESISTE