Analisi Matematica 2

Cognome: .... A.A. 2020-2021

Nome: .... 23 Settembre 2021

---

1. Sia dato l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x\left(x^2+1\right)^{\alpha}\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^{\beta}}\,dx$, calcolarlo per $\alpha=2$ e $\beta=0$ poi studiarne la convergenza al variare di $\alpha,\beta\ge 0$.

2. Studiare al variare di $x\in\mathbf{R}$ la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)^n\cdot n^{-n-\frac{1}{10}}\cdot x^n$.

3. Sia dato l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\alpha+\frac{\sin x}{4}\right|^x dx$.
Studiarne la convergenza nei casi $\alpha=2$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$ e infine (facoltativo) $\alpha=\frac{3}{4}$.

4. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^3y - xy^3 - xy \\ y(0)=1. \end{cases}$$

(1) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne crescenza e decrescenza.
(2) Dire, motivando la risposta se $y(x)$ è una funzione pari.
(3) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y(x)$.
(4) Trovare l'ordine di infinito di $y(x)$ per $x\to+\infty$ (facoltativo).

5. Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y^{(3)}+y''+y'+y=x^2+e^{-x}. \tag{5}$$

Trovare poi un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti tale che l'insieme di tutte le sue soluzioni contenga l'insieme di tutte le soluzioni di (5).

6. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5y+x^3y^3}{x^6+y^4+x^4y^2}$.