

# Equazioni Differenziali

## Sim 4

(Tempo di svolgimento: 3 ore)

**1** DATO IL P. DI CAUCHY  $\begin{cases} y' = y^3 - y \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$  SIA  $y(x)$  LA SUA SOLUZIONE.  
MOSTRARE CHE  $y(x)$  È PROLUNGABILE IN AVANTI FINO A  $+\infty$  E CHE È INFINITESIMA PER  $x \rightarrow +\infty$ . (PER FARLO, LO STUDENTE PUÒ, A SUA DISCREZIONE, RICORRERE AD UNO STUDIO QUALITATIVO OPPURE TROVARE ESPLICITAMENTE  $y(x)$ ).

**2** DATA L'EQUAZIONE  $y' = (y^{2+m(y-x)} + 1) \cdot \frac{1}{1+x^2}$

**a** NEL CASO  $m=0$  TROVARE TUTTE SOL. E DIRE QUALI SONO RETTE.

**b** NEL CASO  $m=1$  DIRE QUALI, TRA LE SOLUZIONI CHE INTERSECANO IL SEMIASSE POSITIVO DELLE  $y$ , SONO PROLUNGABILI FINO A  $+\infty$ .

FACOLTATIVO

**3** DATO L'OPERATORE  $\mathcal{L} = D^5 + 2D^4 + 3D^3 + 3D^2 + 2D + I$ , PER CIASCUNA DELLE SEGUENTI CONDIZIONI, TROVARE TUTTE LE  $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$  CHE LE SODDISFANO:

**a**  $\mathcal{L}(y) = 0$  E  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$ .

**b**  $\mathcal{L}(y) = e^{-2x}$  E  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$ .

**4** DATA L'EQUAZIONE DIFF.  $y^{(4)} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = x^2$

**a** TROVARNE UNA SOL. PARTICOLARE.

**b** TROVARNE TUTTE LE SOL.  $y(x)$  TALI CHE  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = +\infty$ .

FACOLTATIVO

**5** RISOLVERE IL P. DI CAUCHY  $\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot \ln x \\ y(1) = -\frac{3}{4e}, \quad y'(1) = -\frac{1}{4e} \end{cases}$

(Verrà svolto a lezione mercoledì)