Analisi Matematica 2

(Tempo di svolgimento: 3 ore)

Sim 6

1 SIA $f(x)=(x^m-2x^3)e^{-x^2}$ DOVE m È UN PARAMETRO INTERO POSITIVO.

- **a** PER $m=5$ CALCOLARE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.
- **b** PER $m=4$ CALCOLARE $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

2 STUDIARE IL CARATTERE DELL'INTEGRALE IMPROPRIO $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}+\sin x^{\alpha}}\,dx$ NEI SEGUENTI CASI: **a** $\alpha=\frac{1}{2}$, **b** $\alpha=1$.

3 TROVARE PER QUALI $x\in\mathbb{R}$ È CONVERGENTE LA SERIE $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+(n!)^4}}{((2n)!)^2}\,x^n$.

4 DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y'=2x(x^2-y^m) \\ y(0)=0 \end{cases}$ DOVE m È UN PARAMETRO INTERO.

PER $m=1$:
- **a** TROVARE LA SOLUZIONE.

PER $m=4$:
- **b** DETTA $y(x)$ LA SOLUZIONE, MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.
- **c** MOSTRARE CHE $y(x)$ È DISPARI E CHE $y(x)\to+\infty$ PER $x\to\pm\infty$.
- **d** MOSTRARE CHE $y(x)-\sqrt{x}\to 0$ PER $x\to+\infty$ E STIMARNE L'ORDINE DI INFINITESIMO.

5 TROVARE UN'EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA A COEFFICIENTI COSTANTI CON IL MINIMO ORDINE POSSIBILE AVENTE TRA LE SUE SOLUZIONI ANCHE $y(x)=x\cos 2x+e^x\sin x$.

6 PER OGNI $(x,y)\in\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}$ DEFINIAMO $F(x,y)=\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}$.

DIRE SE $F(x,y)$ È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ A TUTTO $\mathbb{R}^2$.