Università di Roma "Tor Vergata" - CdL Matematica

I Esonero AM2

docente: Callegari - tutor: Giorgetti

Cognome: .... **A.A. 2021-2022**

Nome: .... **27 Aprile 2022**

---

1. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x\ln\left(1+x^2\right)}{\left(2+x^2\right)^2}\,dx.$

2. Dato l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+g(x)}\,dx,$ studiarne la convergenza nei casi:

(**a**) $g(x) = x^2$;

(**b**) $g(x) = x$;

(**c**) (facoltativo) $g(x) = x + \sin x^2$.

3. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, il carattere della serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(n!\cdot e^n\right)^2}{n^{\alpha n}}.$

(facoltativo: dire cosa cambia se si mette $(n-1)!$ al posto di $n!$)

4. Studiare il carattere della serie $\sum a_n$ nei seguenti casi:

(**a**) $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$;

(**b**) $a_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} x^n\,dx,$ al variare di $\alpha \in (0,1)$;

(**c**) $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx,$ al variare di $\alpha > 1$;

(**d**) $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{3+\sin x}{x^\alpha}\,dx,$ al variare di $\alpha > 1$;

Tempo: 2 ore
Punteggi: 7+(4+4+?)+(7+?)+(2+2+2+3)

Svolgimento

1. La risposta corretta è $\ln 2$.
Infatti, effettuando prima il cambio di variabile $y = 1 + x^2$ e poi integrando per parti, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{2x\ln\left(1+x^2\right)}{\left(2+x^2\right)^2}\,dx &= \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{2x\ln\left(1+x^2\right)}{\left(2+x^2\right)^2}\,dx = \\
&= \lim_{c\to+\infty}\int_1^{1+c^2} \frac{\ln y}{(1+y)^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_1^{1+c^2}\left(-\frac{1}{1+y}\right)'\cdot \ln y\,dx = \\
&= \lim_{c\to+\infty}\left(\left[-\frac{\ln y}{1+y}\right]_1^{1+c^2} + \int_1^{1+c^2}\frac{1}{(1+y)y}\,dx\right) = \\
&= \lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{\ln\left(1+c^2\right)}{2+c^2} + \frac{\ln 1}{2} + \int_1^{1+c^2}\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\,dx\right) = \\
&= 0 + 0 + \lim_{c\to+\infty}\left[\ln y - \ln(y+1)\right]_1^{1+c^2} = \\
&= \lim_{c\to+\infty}\left(\ln\left(1+c^2\right) - \ln\left(2+c^2\right) - \ln 1 + \ln 2\right) = \\
&= \lim_{c\to+\infty}\ln\left(\frac{1+c^2}{2+c^2}\right) - \ln 1 + \ln 2 = 0 - 0 + \ln 2 = \ln 2
\end{aligned}$$

2. **Punto (a).** Osserviamo che:

$$0 \le \left|\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}.$$

Ma allora, siccome $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge, dal criterio del confronto segue che converge anche

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2}\right|\,dx$$

e quindi, grazie al criterio dell'assoluta convergenza, converge anche il nostro integrale:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2}\,dx.$$

Punto (b). Se invece l'integrale da studiare è

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x}\,dx \tag{1}$$

l'argomentazione del punto precedente non è più riciclabile perché $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ non converge. Quindi per dimostrare che converge non possiamo più ricorrere alla convergenza assoluta, ma utilizzeremo il criterio degli integrali oscillanti. Per farlo però, dobbiamo prima operare un cambio di variabili perché $\cos\sqrt{x}$ non è periodica a media nulla (anzi non è proprio periodica) e non ha nemmeno la primitiva limitata. Osserviamo quindi che

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_1^{c^2}\frac{\cos t}{t+t^2}2t\,dt = \int_1^{+\infty}\frac{2\cos t}{1+t}\,dt$$

e quindi studiare la convergenza del nostro integrale equivale a studiare quella di

$$(2) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{2\cos t}{1+t}\, dt.$$

È a quest'ultimo che possiamo applicare il criterio degli integrali oscillanti (non a quello di partenza) grazie al fatto che $\cos t$ è periodica a media nulla mentre $\frac{2}{t+1} \to 0$ decrescendo. Possiamo dunque concludere che (2) converge e, di conseguenza, converge anche (1).

Punto (c). Infine, se l'integrale da studiare è

$$(3) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x+\sin x^2}\, dx$$

non funziona più nemmeno il criterio degli integrali oscillanti. Se infatti proviamo a operare lo sttesso cambio di variabile fatto al punto precedente otteniamo che studiare la convergenza di (3) equivale a studiare quella di

$$\int_1^{+\infty} \frac{2t\cos t}{t+t^2+\sin t^4}\, dx$$

ma stavolta $\frac{2t}{t+t^2+\sin t^4}$, pur tendendo a zero, non lo fa decrescendo, a causa delle fortissime oscillazioni di $\sin t^4$. Dobbiamo quindi trovare un altro modo.
Ci viene in aiuto la solita considerazione (ovvia) che se alla funzione integranda sottraiamo una funzione il cui integrale converge, il carattere dell'integrale non cambia. Nel nostro caso sappiamo già dal punto precedente che (1) converge e quindi che (3) ha lo stesso carattere di

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x+\sin x^2} - \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x} \right) dx,$$

cioè di

$$(4) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{-\cos\sqrt{x}\sin x^2}{(\sqrt{x}+x+\sin x^2)(\sqrt{x}+x)}\, dx.$$

A questo punto, basta osservare che, per $x \geq 1$, valgono le stime

$$0 \leq \left| \frac{-\cos\sqrt{x}\sin x^2}{(\sqrt{x}+x+\sin x^2)(\sqrt{x}+x)} \right| \leq \frac{1}{x(\sqrt{x}+x)} \leq \frac{1}{x^2}$$

per poter affermare, grazie al criterio del confronto, che

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{-\cos\sqrt{x}\sin x^2}{(\sqrt{x}+x+\sin x^2)(\sqrt{x}+x)} \right| dx$$

converge e quindi, grazie al criterio della convergenza assoluta, converge anche (4). Ma siccome (3) e (4) hanno lo stesso carattere possiamo concludere che converge anche (3), che è quanto volevamo dimostrare.

$\boxed{3.}$ La serie converge se e solo se $\alpha > 2$, sia nel caso semplice che in quello facoltativo.

Cominciamo dal caso semplice, cioè $a_n = \dfrac{(n!\cdot e^n)^2}{n^{\alpha n}}$, utilizzando il criterio del rapporto.

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left((n+1)!\cdot e^{n+1}\right)^2}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}\cdot\frac{n^{\alpha n}}{(n!\cdot e^n)^2} = \\ &= \frac{(n+1)^2\cdot e^2}{(n+1)^{\alpha n+\alpha}}\cdot\frac{n^{\alpha n}}{1} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)^{\alpha}}\cdot e^2\cdot\frac{n^{\alpha n}}{(n+1)^{\alpha n}} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)^{\alpha}}\cdot\frac{e^2}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Quindi per $\alpha < 2$ si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)^{2-\alpha}\cdot\frac{e^2}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\alpha}} \longrightarrow (+\infty)^{2-\alpha}\cdot\frac{e^2}{e^{\alpha}} = +\infty,$$

da cui segue che $\sum a_n$ diverge per il criterio del rapporto.
Invece, se $\alpha > 2$ allora $2-\alpha$ è negativo, quindi si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}}\cdot\frac{e^2}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\alpha}} \longrightarrow \frac{1}{(+\infty)^{\alpha-2}}\cdot\frac{e^2}{e^{\alpha}} = 0,$$

da cui segue che $\sum a_n$ converge per il criterio del rapporto.
Infine per $\alpha = 2$ si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{e}{e}\right)^2 = 1.$$

Sembrerebbe dunque che il criterio del rapporto non si applichi. Tuttavia, siccome $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ crescendo, possiamo concludere che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ decrescendo e quindi che $\sum a_n$ diverge, visto che è sempre $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.
Quindi $\sum a_n$ converge se e solo se $\alpha > 2$.
Passiamo alla domanda facoltativa, che è più difficile.
Infatti se $a_n = \dfrac{\left((n-1)!\cdot e^n\right)^2}{n^{\alpha n}}$, con calcoli molto simili ai precedenti si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha}}\cdot\frac{e^2}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\alpha}},$$

Di conseguenza, anche se per $\alpha \neq 2$ funzionano gli stessi calcoli del caso precedente, il caso critico $\alpha = 2$ è molto più difficile perché si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{e^2}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2} = \left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\right)^2$$

e quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ crescendo perché $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e$ decrescendo.
Proviamo allora a stimare la velocità con cui $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, nella speranza di poter applicare il criterio di Gauss. Si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\right)^2 = e^{2-2(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \tag{5}$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad 2-2(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= 2-(2n+2)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)= \\
&= 2-2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Quindi la (5) diventa

$$
(7)\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=e^{-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).
$$

Questo significa che non possiamo applicare nemmeno il teorema di Gauss perché, per applicarlo, ci servirebbe che fosse

$$
\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
$$

con $\alpha \neq 1$, mentre invece nel nostro caso è proprio $\alpha = 1$.
Tuttavia per risolvere il problema basta un piccolo miglioramento di (6) e (7).
Infatti la (6) può essere resa più precisa nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad 2-2(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= 2-(2n+2)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)= \\
&= 2-2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Quindi la (7) diventa

$$
(9)\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
$$

Se dunque prendiamo $b_n=\frac{1}{n\ln n}$, sappiamo che $\sum b_n$ diverge e inoltre abbiamo

$$
\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln n}{\ln(n+1)}= \\
&= \frac{n+1-1}{n+1}\cdot\frac{\ln(n+1)-\ln(n+1)+\ln n}{\ln(n+1)}= \\
&= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)= \\
(10)\qquad &= \left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\ln(n+1)}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)= \\
&= \left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\ln(n+1)}\cdot\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)= \\
&= \left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n\ln(n+1)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)= \\
&= 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ma allora da (9) e (10) segue che, definitivamente in n, si ha

$$
\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{b_{n+1}}{b_n}
$$

e quindi, grazie al criterio del confronto di rapporti, dal fatto che $\sum b_n$ diverge segue che diverge anche $\sum a_n$, che è quanto volevamo dimostrare.

$\boxed{4.}$ **Punto (a).** Si ha:

$$a_n = \int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Quindi $\sum a_n$ diverge per il criterio del confronto asintotico, perché

$$a_n = \frac{1}{n+1} \approx \frac{1}{n}$$

e sappiamo che $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Punto (b). Per ogni $\alpha \in (0,1)$ si ha:

$$a_n = \int_0^\alpha x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}.$$

Quindi, per ogni $\alpha \in (0,1)$, vale la stima

$$0 \leq a_n = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \alpha^{n+1}$$

quindi $\sum a_n$ converge per il criterio del confronto, perché è una serie a termini positivi maggiorata da una serie geometrica convergente.

Punto (c). Per ogni $\alpha > 1$ si ha:

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_n^c \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \lim_{c \to +\infty} \left[-\frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_n^c = \frac{1}{(\alpha-1) \cdot n^{\alpha-1}}.$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1) \cdot n^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

che è una serie nota della quale sappiamo che converge se e solo se $\alpha - 1 > 1$, cioè $\alpha > 2$.

Punto (d). Poiché $2 \leq 3 + \sin x \leq 4$, si ottiene:

$$\int_n^{+\infty} \frac{2}{x^\alpha} \, dx \leq a_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{4}{x^\alpha} \, dx$$

Da cui, dopo calcoli identici a quelli del punto precedente, si ottiene:

$$\frac{2}{(\alpha-1) \cdot n^{\alpha-1}} \leq a_n \leq \frac{4}{(\alpha-1) \cdot n^{\alpha-1}}.$$

Quindi, grazie al criterio del confronto, si ottiene la convergenza negli stessi casi del punto precedente, cioè se e solo se $\alpha > 2$.