Analisi Matematica 1 - Lezione 1 (prima parte)

29 Settembre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

$\boxed{\text{Teoria Insiemi}} \to \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

INIZIO QUI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = insieme dei n. razionali $\cong$ insieme di tutte le frazioni

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali = numeri decimali
- finiti
- illimitati periodici } $\mathbb{Q}$
- illimitati non periodici

con 2 operazioni $+$ e $\cdot$ e una relazione $\leq$.

Proprietà che prendiamo come assiomi per la nostra teoria è che $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ sia un CAMPO, TOTALMENTE ORDINATO E COMPLETO.

CAMPO significa dire che per $+$ e $\cdot$ valgono tutte le consuete proprietà algebriche.

TOTALMENTE ORDINATO significa che $\leq$ è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{R}$ cioè ha le proprietà

(Riflessiva) 1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \leq \alpha$

(antisimmetrica) 2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha \leq \beta \text{ e } \beta \leq \alpha) \Rightarrow \alpha = \beta$

(transitiva) 3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (\alpha \leq \beta \text{ e } \beta \leq \gamma) \Rightarrow \alpha \leq \gamma$

4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale sempre almeno una delle 2 relazioni $\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$.

Inoltre bisogna che se $\alpha \leq \beta$ allora $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

e che se $\gamma > 0$ allora da $\alpha \leq \beta$ segue $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

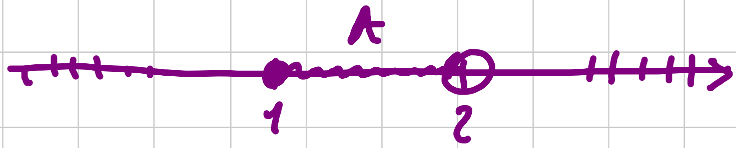
COSA SIGNIFICA CHE $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ È COMPLETO?

Def 1 Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ diremo che x_0 è maggiorante (minorante) di A se $\forall x \in A \quad x \leq x_0$ ($\geq$).

Def. 2 Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ diremo che x_0 è il massimo (minimo) di A se $x_0 \in A$ e x_0 è maggiorante (minorante) di A.

Def. 3 Dato $A \subset \mathbb{R}$ diremo $\lambda \in \mathbb{R}$ è estremo superiore (inferiore) di A ($\lambda = \sup A$ (inf)) se λ è il minimo maggiorante (massimo minorante) di A.

Esempio:



minoranti di A sono gli $x \leq 1$

maggioranti di A sono gli $x \geq 2$

$\max A =$ non esiste $\quad \min A = 1$

$\sup A = 2 \quad \inf A = 1$

Def. 4 Dato $A \subset \mathbb{R}$ diremo che

1) A è superiormente limitato se ha almeno un maggiorante
2) A è inferiormente limitato se ha almeno un minorante.
3) A è limitato se lo è sia inferiormente che superiormente.

Dire che $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è completo significa dire che vale la seguente:

PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA

Sia $A \subset \mathbb{R}$ allora si ha:

1) Se A è sup. limitato allora $\sup A$ esiste.

2) Se A è inf. limitato allora inf A esiste.

$\boxed{\text{Spiegazione Significato.}}$

$\boxed{\text{Esempio}}$

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \;/\; \frac{m}{n} > 0 \text{ e } \left(\frac{m}{n}\right)^2 > 2 \right\}$$