# Analisi Matematica 1 - Lezione 1 (seconda parte)

29 Settembre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

**Teorema 1** (Proprietà Archimedea) [Equivale a dire che $\mathbb{N}$ non ha maggioranti]

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq \alpha$.

**Dim**

P.A. supponiamo che $\mathbb{N}$ sia superiormente limitato, quindi $\exists \lambda = \sup \mathbb{N}$.
Quindi $\lambda$ è il minimo dei maggioranti di $\mathbb{N}$, quindi $\lambda - \frac{1}{2}$ non è un maggiorante di $\mathbb{N}$. Quindi

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n_0 > \lambda - \frac{1}{2}$$

Ma allora

Contraddice $\lambda = \sup \mathbb{N}$

$$\boxed{n_0 + 1} > \lambda - \frac{1}{2} + 1 = \lambda + \frac{1}{2} > \boxed{\lambda}$$

Quindi è assurdo supporre che $\mathbb{N}$ sia sup. limitato. ∎

---

**Corollario 1**

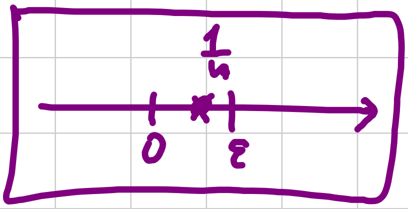
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n\alpha > \beta$.

**Dim**

Basta prendere il numero $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, avrò che $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n > \frac{\beta}{\alpha}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{n\alpha > \beta}$$

**Corollario 2**



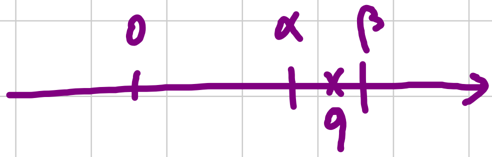

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

**Dim**

Preso un qualsiasi $\varepsilon > 0$, avrò che $\frac{1}{\varepsilon} > 0$.

Quindi $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon}$$

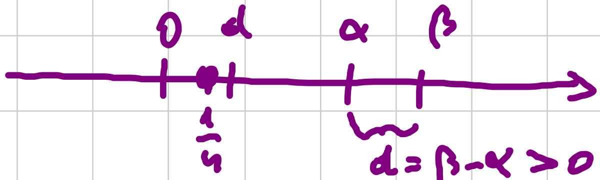



**Corollario 3** (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $\alpha < q < \beta$

**Dim**

Senza perdere di generalità possiamo supporre che $\alpha, \beta > 0$.




Sia $d = \beta - \alpha > 0$.

Sappiamo che $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \frac{1}{n} < d = \beta - \alpha$

Sappiamo che esiste sempre un multiplo di $\frac{1}{n}$ che supera $\alpha$.

Prendo il più grande $k_0$ t.c. $\boxed{k_0 \cdot \frac{1}{n} \leq \alpha}$,

quindi $\boxed{(k_0 + 1)\frac{1}{n} > \alpha}$

Posso dire che $\alpha < \underbrace{\boxed{(k_0+1)\cdot\frac{1}{n}}}_{\in \mathbb{Q}} < \beta$ ?? $\boxed{\text{SI}}$

Perché

$$\boxed{(k_0+1)\cdot\frac{1}{n}} = \left(k_0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) \leq \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + d = \alpha + \beta - \alpha = \boxed{\beta}$$

Quindi per avere la tesi basta prendere $\boxed{q = (k_0+1)\cdot\frac{1}{n}}$