Analisi Matematica 1 - Lezione 2 (prima parte)

1 Ottobre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

TOPOLOGIA di $\mathbb{R}$

NOTAZIONI SU INSIEMI

$\emptyset$ insieme vuoto

Per definire un insieme fare:

1) $\{\ldots$ elenco elementi$\}$ es: $A = \{1, 3, 5\}$
2) $\{a \in B \mid \text{proprietà}\}$

   es. numeri dispari $= \{\underline{\underline{n \in \mathbb{N}}} \mid n = 2k+1 \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$
3) $\{f(a) \mid a \in B\}$ $\quad \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
4) intervalli $[a, b)$

OPERAZIONI TRA INSIEMI

1) $A \cup B$ = insieme degli oggetti che stanno in A o in B = unione
2) $A \cap B$ = insieme degli oggetti che stanno sia in A che in B = intersezione
3) $A - B$ = insieme degli oggetti che stanno in

A ma non in B (differenza)

4) $A^c = \text{Tutto} - A$

PROPRIETÀ OP. TRA INSIEMI

1) Prop. Stupide (.... es. $A \subset A$) (Note)

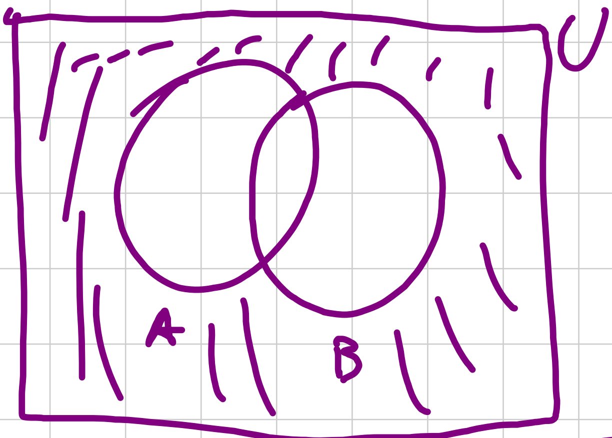
2) Prop. Non Stupide

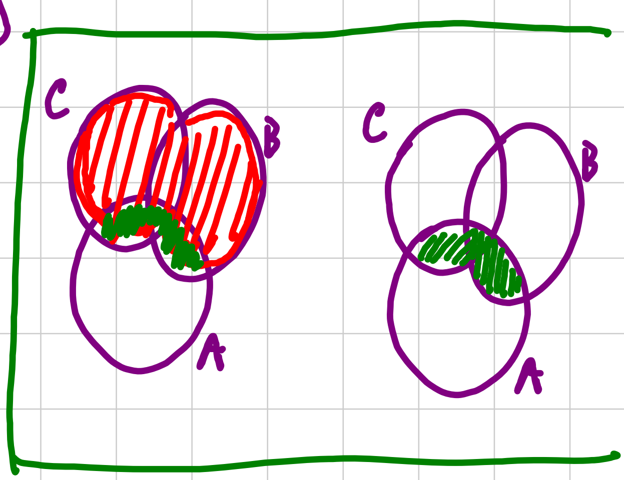
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

} distributività

c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

} L. di De Morgan





TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}$

Def. 1 Dati $a, b \in \mathbb{R}$ $d(a,b) = |a-b|$

Teorema 1 La distanza d ha le seguenti proprietà:

$\forall a,b,c$

1) $d(a,b) = 0 \iff a = b$ (ovvio)
2) $d(a,b) = d(b=a)$ (ovvio)
3) $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$ (dis. triangolare)

$\boxed{\text{Dim. di (3)}}$

$(|x+y| \leq |x|+|y|)$

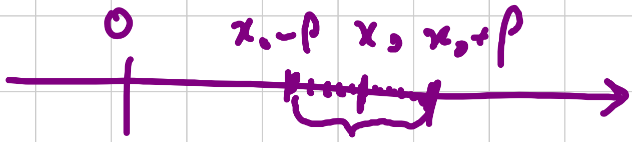
$$d(a,c) = |c-a| = |(c-b)+(b-a)| \leq$$

$$\leq |c-b| + |b-a| = d(c,b) + d(b,a)$$

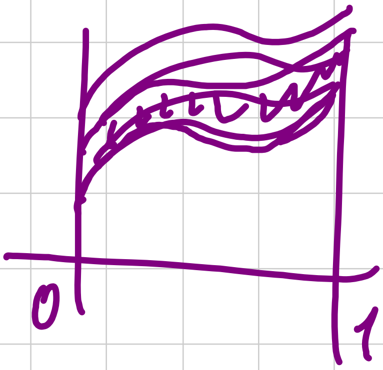
$\boxed{\text{Def. 2}}$ (intorno)

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$ definiamo

$$I_\rho(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} \mid d(x,x_0) < \rho \}$$



Però in generale se definisco altre distanze tra altri oggetti ottengo definizioni diverse di intorno e concetti diversi di limite.



Def. 3 Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ diremo che:

1) x_0 è **interno** ad A se $\exists \rho > 0$ t.c. $I_\rho(x_0) \subset A$.

2) x_0 è **esterno** ad A se $\exists \rho > 0$ t.c. $I_\rho(x_0) \cap A = \emptyset$

3) x_0 è **di frontiera** per A se non è né interno né esterno. (Equivalentemente: dire che è di frontiera è come dire che $\forall \rho > 0$ $I_\rho(x_0)$ interseca sia A che A^c)

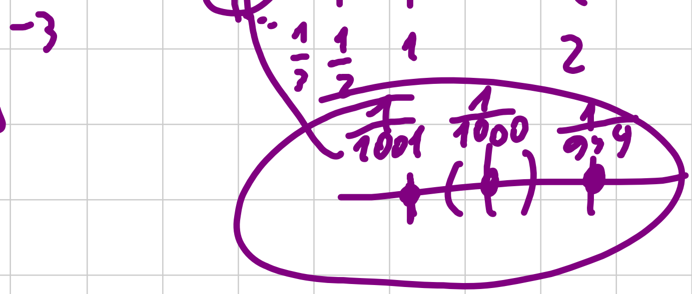
4) x_0 è **di accumulazione** per A se $\forall \rho > 0$ $I_\rho(x_0) \cap A$ contiene punti diversi da x_0

5) x_0 è **un punto isolato di A** se $x_0 \in A$ ma non è di acc. per A.

Esempio $A = \left(\mathbb{Q} \cap (-\infty, -3)\right) \cup \left\{\frac{1}{n+1} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \cup (2, 3]$

parte interna

$\mathbb{Q} \cap (-\infty, -3)$



$\mathring{A} = (2, 3)$

Pt. frontiera

$\partial A = (-\infty, -3] \cup \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n+1} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{2, 3\}$

Pt. Acc.

$DA = (-\infty, -3] \cup \{0\} \cup [2, 3]$