Analisi Matematica 1 - Lezione 2 (seconda parte)

1 Ottobre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

Def. 1 Dato $A \subset \mathbb{R}$ diremo che:

1) A è **aperto** se ogni suo punto è un punto interno
2) A è **chiuso** se A^c è aperto
3) A è **denso** se non esistono punti esterni ad A.
4) A è **discreto** se è costituito solo da punti isolati

Teorema Sia $A \subset \mathbb{R}$ allora è equivalente affermare che:

1) A^c è aperto
2) $\partial A \subset A$
3) $DA \subset A$

Dim

OSS. $\partial A = \partial(A^c)$

x t.c. $\forall \rho > 0$ $I_\rho(x)$ interseca sia A che A^c

(1)⇔(2) $(1) \Leftrightarrow A^c$ è aperto $\Leftrightarrow \left(\partial(A^c) \cap A^c = \emptyset\right) \Leftrightarrow \left(\partial(A^c) \subset A\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\partial A \subset A\right) \Leftrightarrow (2)$

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ $x \in \partial A \Rightarrow x \in A$

?

P.A. $\underbrace{x \text{ sia di acc.}}$ ma non stia in A

$\Downarrow$

$\forall \rho > 0$ $I_\rho(x) \cap A$ contiene sempre punti diversi da x

$\Downarrow$ $\leftarrow$ perché P.A. $x \notin A$ e quindi $I_\rho(x)$ interseca A^c

$x \in \partial A \subset A$ (ASSURDO)

$\boxed{(3) \Rightarrow (2)}$ P.A. supponiamo $\underbrace{x \in \partial A}$, ma $\underbrace{x \notin A}$

$I_\rho(x) \cap A$ è non vuoto

$\downarrow$

$I_\rho(x) \cap A$ contiene punti $\neq x$

$\downarrow$

x è di acc.

$\downarrow \leftarrow (3)$

$x \in A$ (ASSURDO)