Analisi Matematica 1 - Lezione 3 (prima parte)

2 Ottobre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

Teorema 2 Dati: $A, B \subset \mathbb{R}$ allora

a) A, B aperti $\Rightarrow$ $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti

b) A, B chiusi $\Rightarrow$ $A \cup B$ e $A \cap B$ sono chiusi

Dim

A aperto $\Rightarrow \forall x \in A \ \exists \rho_A > 0$ t.c. $I_\rho(x) \subset A$

B . . . . ρ_B $\qquad I_{\rho_B}(x) \subset B$

Per mostrare che $A \cap B$ è aperto, preso $x \in A \cap B$ sia ρ_B t.c. $I_{\rho_B}(x) \subset B$ e ρ_A t.c. $I_{\rho_A}(x) \subset A$

Preso $\rho = \min(\rho_A, \rho_B)$ si ha che $I_\rho(x) \subset$ sia in A che in B e quindi in $A \cap B$.

Quindi ogni $x \in A \cap B$ è interno ad $A \cap B$ cioè $A \cap B$ è aperto.

Mostriamo che anche $A \cup B$ è aperto.

Preso $x \in A \cup B$ in particolare $x \in$ uno dei 2 (ad esempio A) allora siccome A è aperto $\exists \rho > 0$ t.c. $I_\rho(x) \subset A \subset A \cup B$. Quindi x è interno a $A \cup B$.

Questo vale per ogni $x \in A \cup B$, quindi $A \cup B$ è aperto.

N.B. Se era unione non di 2 ma di infiniti insiemi aperti l'unione è ugualmente aperto (stessa dimostrazione)

$\boxed{\text{Teorema 3}}$ Dato $A \subset \mathbb{R}$ chiuso. Allora:

1) se A è superiormente limitato allora ha un MAX.
2) se A è inferiormente limitato allora ha un MIN.

In particolare se A è chiuso e limitato allora ha sempre sia MAX che MIN.

$\boxed{\text{Dim}}$ Se A è sup. limitato allora, per la completezza di $\mathbb{R}$, esiste $\lambda = \sup A$.
Per mostrare che $\lambda = \sup A$ è anche $\max(A)$ basta mostrare che $\lambda \in A$. Siccome A è chiuso, basta mostrare che $\lambda \in \partial A$.
A tale scopo osserviamo che $\forall \rho > 0$
$\lambda - \rho$ non è un maggiorante, quindi esiste $a \in A$ t.c. $\lambda - \rho < a \leq \lambda$

$$\Downarrow$$

$$a \in I_\rho(\lambda)$$

Quindi abbiamo dimostrato che $\forall \rho > 0$
$I_\rho(\lambda) \cap A \neq \emptyset$
e quindi λ non è esterno a A,
e di conseguenza $\lambda \in A$ perché A è chiuso.
Quindi $\lambda = \max(A)$.

$\boxed{\text{Teorema 4}}$ (BOLZANO - WEIERSTRASS)

Se $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme infinito ma limitato allora $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ che è di accumulazione per A.

$\boxed{\text{Dim}}$

Siccome A è limitato esiste $[a,b] \subset \mathbb{R}$ t.c. $A \subset [a,b]$.

Siccome A è infinito allora in almeno uno dei 2 intervalli: $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ e $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ ci sono infiniti punti di A. (1) (2)

Pongo $a_0 = a$ e $b_0 = b$

Poi pongo a_1 e b_1 = i due estremi dell'intervallo scelto tra (1) e (2) in modo che abbia infiniti punti di A.

Iterando il procedimento ottengo una successione di segmenti

$$I_0 = [a_0, b_0]$$
$$I_1 = [a_1, b_1]$$
$$\vdots$$
$$I_n = [a_n, b_n]$$
$$\vdots$$

tali che

1) $I_n \supset I_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) I_n contiene infiniti punti di A $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

Consideriamo i due insiemi $\Omega_A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$
$\Omega_B = \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$

Prendo $\lambda_A = \sup \Omega_A$ e $\lambda_B = \inf \Omega_B$

Poiché ogni elemento di Ω_A è $\leq$ di ogni elemento di Ω_B, allora $\lambda_A \leq \lambda_B$.

Quindi $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \lambda_A \leq \lambda_B \leq b_n$

cioè λ_A e λ_B sono contenuti in ogni $[a_n, b_n]$

Quindi $\lambda_B - \lambda_A \leq \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e quindi anche

$$0 \leq \lambda_B - \lambda_A \overset{(*)}{\leq} \frac{b-a}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

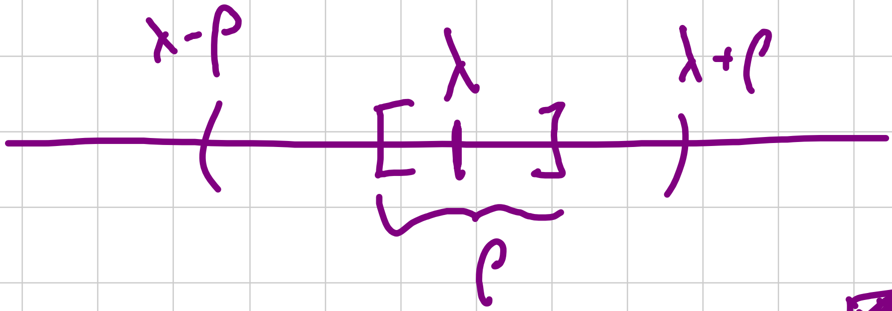
Quindi $\lambda_B - \lambda_A$ non può essere > 0 altrimenti la (*) non potrebbe valere per ogni n.

Quindi $\lambda_A = \lambda_B \overset{\text{def}}{=} \lambda$

Mostriamo ora che λ è pt. di Acc. per A.

$\forall \rho > 0$ prendiamo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{b-a}{2^n} < \rho$

Per tale n avrò che



$\blacksquare$