Analisi Matematica 1 - Lezione 6

9 Ottobre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

$\boxed{\text{SUCCESSIONI in } \mathbb{R}}$

Def 1 Una successione a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

Notazione Scriveremo a_n al posto di $f(n)$
a_n indica il termine n-esimo
(a_n) indica tutta la successione

Def 2 Data (a_n) diremo che

1) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$
e scriveremo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq n_0}_{\text{definitivamente in } n} \ |a_n - \ell| < \varepsilon$$

2) $a_n \to +\infty$ $(-\infty)$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ def. in n $a_n > M$ ($a_n < M$)

3) a_n è indeterminata se non ha limite né finito né infinito.

Es 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ "conseguenza del fatto che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

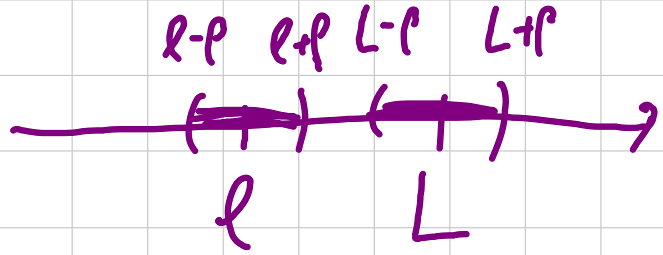
$$\forall \varepsilon > 0 \text{ def. in } n \ 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Es 2 $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ "Prop. Archimedea"

Teorema 1 (Unicità del limite)

Data (a_n) il suo limite, se esiste, è unico.

Dim



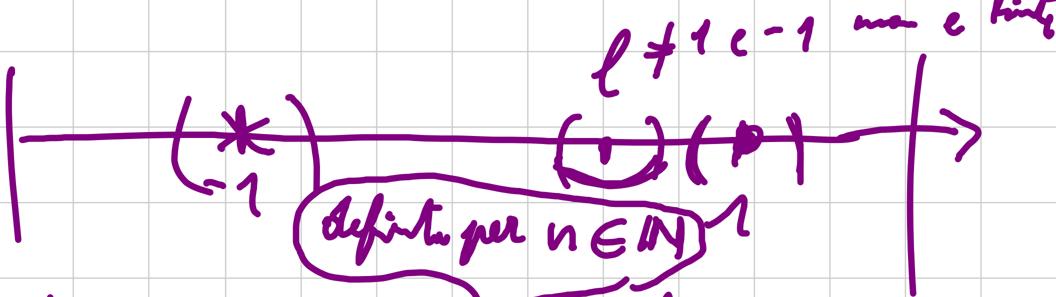
Se P.A. esistono 2 limiti ℓ e L diversi prendo $\rho < \frac{L-\ell}{2}$, per cui $(\ell-\rho, \ell+\rho)$ $(L-\rho, L+\rho)$ non si intersecano.

Poiché $a_n \to \ell$ si ha che def. in n $a_n \in (\ell-\rho, \ell+\rho)$

Poiché $a_n \to L$ si ha che def. in n $a_n \in (L-\rho, L+\rho)$

ASSURDO perché intorni sono disgiunti

Es. 3 $a_n = (-1)^n$ non ha limite



Notazione Diremo che una proprietà vale frequentemente in n se vale per infiniti valori di n.

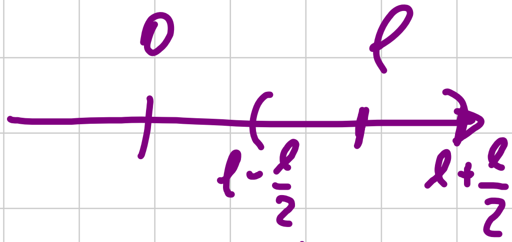
OSS. Dire che una proprietà non è definitivamente in n vera è come dire che è frequentemente in n falsa.

Teorema 2 (Permanenza del segno)

Data (a_n) t.c. $a_n \to \ell > 0$, allora definitivamente in n si ha $a_n > 0$.

Dim

Basta prendere $\rho = \frac{\ell}{2}$.



So che, def. in n, $a_n \in \left(\ell - \frac{\ell}{2}, \ell + \frac{\ell}{2}\right)$

in particolare, def. in n, $a_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$

Teorema 3

Data (a_n), se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora (a_n) è limitata.

Dim

Prendo $(\ell - 1, \ell + 1) =: A$

Poiché $a_n \to \ell$, def. in n $a_n \in (\ell - 1, \ell + 1)$

cioè $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq n_0$ allora $a_n \in (\ell - 1, \ell + 1)$

I punti della successione che potrebbero non stare in A sono solo:

$$a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}$$

Quindi tutta la successione è contenuta in

$$\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\} \cup A \subset$$ opportuno intervallo

Quindi (a_n) è tutta contenuta in un intervallo.

Teorema 4 (Confronto n. 1)

Date (a_n), (b_n) e (c_n) tali che

1) def. in n $a_n \leq b_n \leq c_n$

2) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

3) $c_n \to \ell \in \mathbb{R}$

Allora anche $b_n \to \ell$.

def. in n
$a_n \leq b_n \leq c_n$

Dim $\forall \varepsilon > 0$

grazie a (2) so che

2') def. in n $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

grazie a (3) so che

3') def. in n $\ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$

quindi def. in n valgono tutte e 3, per cui def. in n si ha

$$\underbrace{\ell-\varepsilon} < a_n \leq \boxed{b_n} \leq c_n < \underbrace{\ell+\varepsilon}$$

Quindi, def. in n $\quad b_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$

cioè $b_n \to \ell$

Teorema 5 (T. del confronto n. 2)

Date (a_n) e (b_n) tali che

1) def. in n $\quad a_n \geq b_n$

2) $b_n \to +\infty$

Allora anche $a_n \to +\infty$.

Dim $\forall M \in \mathbb{R}$ da (2) segue che

2') def. in n $\quad b_n > M$

Quindi da (1) e (2') segue che

$$\text{def. in } n \quad a_n \geq b_n > M$$

Quindi ho dimostrato che $\forall M \in \mathbb{R}$

def. in n $\quad a_n > M$.

Cioè $\quad a_n \to +\infty$

$\boxed{\text{Es. 3}}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$

Oss. $\quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$0 \leq \underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{\downarrow \, 0} < \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \frac{1}{n^2+1} & < & \frac{1}{n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{Es. 4}}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \log_3(1+4^n) = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\log_3(1+4^n)} & > & \log_3(3^n) & = & n \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ +\infty & & & & +\infty \end{array}$$

$\boxed{\text{Es. 5}}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n + \sin n}{n^2 + 3n}$ $\quad \boxed{\frac{1}{n} \cdot \frac{n + \sin n}{n+3}}$

def. in n $\quad 0 < \frac{n + \sin n}{n^2 + 3n} = \boxed{\frac{(n + \sin n)}{n(n+3)}} < \frac{1}{n}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0 \qquad 0$

ES. 6 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n + \arctan n}{n^2}$

def sin n

$$0 < \frac{\sin n + \arctan n}{n^2} < \frac{3}{n^2} = \frac{3}{n}\cdot\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0$$

ES. 7 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - \underset{\sqrt{n^2}}{n}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < \boxed{\sqrt{n^2+1}-n} = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0$$

Def Data (a_n) diremo che essa è crescente strett. (def.)

se $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$ $(\geq)$

Teorema Sia (a_n) una successione crescente

allora il limite di a_n esiste sempre

e si ha $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

$\boxed{\text{Dim}}$ Facciamo il caso in cui (a_n) è superiormente limitata.

Sappiamo che, per la completezza di $\mathbb{R}$,

$\exists \lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$

Vogliamo dimostrare che $a_n \to \lambda$

cioè devo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0$ def. in n $\lambda - \varepsilon < a_n < \lambda + \varepsilon$

Perché $\lambda - \varepsilon$ non è maggiorante (visto che $\lambda = \sup a_n$) quindi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} > \lambda - \varepsilon$

e quindi $a_n > \lambda - \varepsilon$ da n_0 in poi perché a_n è crescente

gratis $\forall n$ perché λ è $\sup a_n$

quindi $a_n \to \lambda$. $\blacksquare$