Analisi Matematica 1 - Lezione 7

13 Ottobre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

1) Teoremi sulle operazioni sui limiti

2) Catene di infiniti

$\boxed{1}$ OPERAZIONI SUI LIMITI

$\boxed{\text{Teorema}}$ Date (a_n) e (b_n) t.c. $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ e $b_n \to L \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $a_n + b_n \longrightarrow \ell + L$
2) $a_n \cdot b_n \longrightarrow \ell \cdot L$
3) se inoltre $L \neq 0$ allora $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{\ell}{L}$.

$\boxed{\text{Dim}}$ $\boxed{1}$ Dobbiamo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$

def. in n $\quad (\ell + L) - \varepsilon < a_n + b_n < (\ell + L) + \varepsilon$

So che

def. in n $\quad \ell - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$

def. in n $\quad L - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < L + \frac{\varepsilon}{2}$

quindi

def in n $\quad \ell + L - \varepsilon < a_n + b_n < \ell + L + \varepsilon$ $\blacksquare$

$\boxed{2}$ vogliamo dimostrare che, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ si ha:

def. in n $\quad \ell \cdot L - \varepsilon < a_n \cdot b_n < \ell \cdot L + \varepsilon$

$$|a_n b_n - \ell \cdot L| < \varepsilon \qquad (?)$$

$$|a_n b_n - a_n \cdot L + a_n \cdot L - \ell \cdot L| < \varepsilon \quad (?)$$

$$|a_n b_n - a_n L + a_n L - \ell L| = |a_n(b_n - L) + L(a_n - \ell)| \le$$

$$\le |a_n(b_n - L)| + |L \cdot (a_n - \ell)| =$$

$$= |a_n| \cdot |b_n - L| + |L| \cdot |a_n - \ell| \le$$

So che $\exists K > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \le K$

$$\le K|b_n - L| + |L| \cdot |a_n - \ell| \le$$

def. in n so che $|b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2K}$

def. in n so che $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2|L|}$

$$< \cancel{K} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{K}} + \cancel{|L|} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{|L|}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

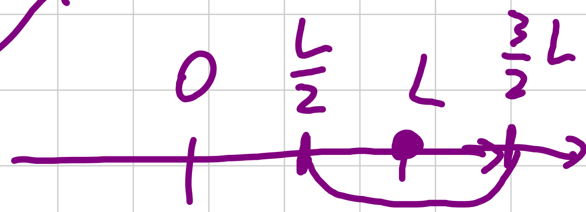
$\boxed{3}$ Avendo che $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, basterà mostrare che $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{L}$

Dobbiamo dimostrare che comunque fissiamo $\varepsilon > 0$, si ha

def. in n $\quad \left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{L}\right|<\varepsilon \quad$ (??)

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{L}\right| = \frac{|b_n-L|}{|b_n|\cdot|L|} \le$$

$\boxed{\text{def. in } n \quad |b_n| > \frac{|L|}{2}}$



$$\le \frac{|b_n-L|}{\frac{|L|}{2}\cdot|L|} = 2\,\frac{|b_n-L|}{|L|^2} < \cancel{2}\cdot\frac{\frac{\cancel{|L|^2}\cdot\varepsilon}{\cancel{2}}}{\cancel{|L|^2}} = \varepsilon$$

$\boxed{\text{def. in } n \quad |b_n-L| < \frac{|L|^2\varepsilon}{2}}$

Esempio $\quad \forall\alpha>0 \quad \boxed{n^\alpha\to+\infty}$ e $\boxed{\frac{1}{n^\alpha}\to 0}$

Se $\alpha\ge 1$ sapevo già perché

$$n^\alpha \ge n \to +\infty$$

$$0<\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Mostriamo che $\forall k\in\mathbb{N}-\{0\}$ si ha

$$n^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{n} \longrightarrow +\infty \quad (?)$$

Infatti $\sqrt[k]{n}$ è crescente (in n) quindi tende al suo sup.

Se per assurdo $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{n} = \ell \in \mathbb{R}$

allora
$$\sqrt[k]{n} \to \ell$$

$$n = \underbrace{\sqrt[k]{n} \cdot \sqrt[k]{n} \cdots \cdot \sqrt[k]{n}}_{k} \to \underbrace{\ell \cdot \ell \cdots \ell}_{k} = \ell^k$$

(assurdo perché $n \to +\infty$)

Quindi è assurdo aver supposto che il limite di $\sqrt[k]{n}$ fosse finito

Ora $\forall \alpha > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n^\alpha > n^{\frac{1}{k}} \to +\infty$$

Quindi $n^\alpha \to +\infty$ (per confronto).

ESTENSIONE TEOREMA OPERAZIONI SUI LIMITI

Teorema Date (a_n) e (b_n) successioni, se $a_n \to +\infty$ $(-\infty)$ e b_n è inferiormente (superiormente) limitata allora

$a_n + b_n \to +\infty$ $(-\infty)$

Dim Voglio far vedere che $\forall M \in \mathbb{R}$

def. in n $\quad a_n + b_n > M$

So che $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad b_n > \lambda$

So che def. in n $\quad a_n > M - \lambda$

def. in n $\quad a_n + b_n > M \cancel{-\lambda} \cancel{+\lambda} = M$

$\blacksquare$

Attenzione

Se invece $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$

non posso dire nulla (useremo la parola "FORMA INDETERMINATA")

Infatti se $a_n = n^2$ e $b_n = -n$

si ha $\quad a_n + b_n = n^2 - n = n(n-1) > n \to +\infty$

quindi $a_n + b_n \to +\infty$

Se invece $a_n = n$ e $b_n = -n^2$

si ha $a_n + b_n = n - n^2 = n(1-n) < -n \to -\infty$

quindi $a_n + b_n \to -\infty$

$\boxed{\text{Generalizzazione di Prodotto dei limiti}}$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Date (a_n) e (b_n) tali che

1) $a_n \to +\infty$
2) $\exists \lambda > 0$ t.c. def. in n $b_n \geq \lambda$

Allora $a_n \cdot b_n \to +\infty$

$\boxed{\text{Dim}}$ Voglio mostrare che $\forall M \boxed{\in \mathbb{R}}$ $\boxed{>0}$

$$\text{def. in } n \quad a_n \cdot b_n > M$$

So che:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{def. in } n & b_n \geq \lambda > 0 \\ \text{def. in } n & a_n > \dfrac{M}{\lambda} \end{array}}$$

$$a_n \cdot b_n > \frac{M}{\lambda} \cdot \lambda = M$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to 0$

ho la forma indeterminata $\infty \cdot 0$

$$a_n = n \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$a_n \cdot b_n = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

Ma $a_n = n^2 \qquad b_n = \frac{1}{n}$

si ha $a_n \cdot b_n = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \to +\infty$

Generalizzazione del quoziente di limiti

Teorema Date (a_n) e (b_n) successioni.

Allora:

1) $\left(a_n \text{ è limitata e } |b_n| \to +\infty \right) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$

2) $\left(|a_n| \to +\infty \text{ e } b_n \text{ limitata}, \ b_n \neq 0 \right) \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \to +\infty$

3) $\left(\begin{array}{l} b_n \to 0 \\ b_n \neq 0 \end{array} \text{ e } \exists \lambda > 0 \text{ t.c. def. in } n \ |a_n| > \lambda \right) \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \to +\infty$

CATENE DI INFINITI

Teorema Siano $a > 1$ e $\alpha > 0$. Allora

$\log_a n$, n^α, a^n, $n!$ e n^n

tendono tutti a $+\infty$ per $n \to +\infty$.

Inoltre

1) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$$

2) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

3) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

4) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

DIMOST. PROSSIMA LEZIONE

ESEMPI

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n + n!}{5^n + n^{100}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\left(\frac{2^n}{n!} + 1\right)}{5^n\left(1 + \frac{n^{100}}{5^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n!}{5^n}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{\left(\overbrace{\frac{2^n}{n!}}^{0}+1\right)}{\left(1+\underbrace{\frac{n^{100}}{5^n}}_{0}\right)}}_{\to 1} = +\infty$$