Analisi Matematica 1 - Lezione 9 (II parte)

Titolo nota 22 Ottobre 2015 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

Teorema: Date (a_n) e (b_n) t.c.

1) $a_n > 0$
2) $a_n \to \ell > 0$
3) $b_n \to L \in \mathbb{R}$

Allora $a_n^{b_n} \to \ell^L$.

Teorema A: Data (a_n) t.c. $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ e data $A > 0$ allora $A^{a_n} \to A^{\ell}$.

Dim: Mostriamo prima caso particolare in cui $\ell = 0$.

Passo 1 $\begin{cases} \text{Per cominciare supponiamo che } a_n > 0. \\ \text{Supponiamo anche } A > 1. \end{cases}$

Vogliamo dimostrare che $A^{a_n} \to 1$, cioè che:

$\forall \varepsilon > 0$ def. in n si ha $1 - \varepsilon < A^{a_n} < 1 + \varepsilon$ (S1)

$\forall n \in \mathbb{N}$ perché $\boxed{A^{a_n} > 1}$

$A^{a_n} < 1 + \varepsilon$ equivale a $A < \underbrace{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{a_n}}}_{\downarrow \; +\infty}$

Teorema sulla catena degli infiniti

vale def. in n

Passo II $A^{a_n} \to 1$ con $A > 1$ anche se a_n non è sempre positivo.

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{A^{|a_n| + \frac{1}{n}}}}}_{\downarrow \; 1} < \frac{1}{A^{|a_n|}} \le \frac{1}{A^{-a_n}} = \underbrace{\boxed{A^{a_n}}}_{\downarrow \; 1} \le A^{|a_n|} < \underbrace{A^{|a_n| + \frac{1}{n}}}_{\downarrow \; 1}$$

Passo III $\quad \boxed{A > 1} \quad A^{a_n} \to A^{\ell}$ se $a_n \to \ell$

$$A^{a_n} = A^{(a_n-\ell)+\ell} = \underbrace{A^{(a_n-\ell)}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{A^{\ell}}_{\downarrow\, A^{\ell}} = A^{\ell}$$

Passo IV $\quad 0 < A < 1 \quad A^{a_n} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^{a_n}} \to \dfrac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^{\ell}} = A^{\ell}$

Teorema B: Dato $A \subset \mathbb{R}$ ed $f: A \to \mathbb{R}$ ed (a_n) t.c.

1) $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $a_n \to \ell \in A$

Avrò che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\ell)$ nei seguenti casi

1) $f(x)$ polinomio e $A = \mathbb{R}$

2) $f(x)$ funzione razionale e A = dominio naturale di f

3) $f(x) = a^x$ con $a > 0$ e $A = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$ $\quad A = (0, +\infty)$

5) $f(x)$ funzione trigonometrica diretta o inversa e A = dominio naturale.

Dimostrazione Teorema iniziale

$$\boxed{a_n^{b_n}} = e^{\ln(a_n^{b_n})} = e^{\boxed{b_n \cdot \ln(a_n)}} \to e^{L \cdot \ln(\ell)} = e^{\ln(\ell^L)} = \ell^L$$

$$\boxed{b_n \cdot \ln(a_n)} \to \boxed{L \cdot \ln(\ell)}$$