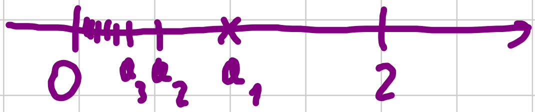
## SUCCESSIONI E TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}$

**ES. 1**

$A=(0,2)\subset\mathbb{R}$

$a_n=\frac{1}{n}\quad n\in\mathbb{N}-\{0\}$




$(a_n)$ in $A$

$a_n\to 0\notin A$

**Teorema 1** Dato $A\subset\mathbb{R}$, è equivalente affermare che

1) $\forall (a_n)$ a valori in $A$, se $a_n\to \ell$ allora $\ell\in A$.
2) $A$ è chiuso.

**Dim** $(1)\Rightarrow(2)$ Vogliamo mostrare che $\forall x_0\in\mathbb{R}$

$$\boxed{x_0 \text{ è di acc. per } A \Rightarrow \underbrace{x_0\in A}_{\uparrow\ (1)}}$$

$x_0$ è di acc. per $A$

$\Downarrow$

$\forall n\in\mathbb{N}-\{0\}$ $\boxed{I_{\frac{1}{n}}(x_0)\cap(A-\{x_0\})}\neq\emptyset$

$\Downarrow$

$\forall n\in\mathbb{N}-\{0\}$ posso prendere $a_n\in$

$\Downarrow$

$(a_n)$ è in $A-\{x_0\}$ e $|a_n-x_0|<\frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$(a_n)$ è una succ. in $A$ che tende a $x_0$

$(1)\longrightarrow\ \Downarrow$

$x_0\in A$

Quindi $A$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione e quindi è chiuso.

$(2) \Rightarrow (1)$ $\left(\left(A \text{ è chiuso}\right) \text{ e } \left((a_n) \text{ è in } A\right) \text{ e } \left(a_n \to \ell\right)\right) \Rightarrow \left(\ell \in A\right)$

P.A. $\ell \notin A$

$\Downarrow$ ← A è chiuso

$\ell$ è esterno ad $A$

$\Downarrow$

$\exists I$ intorno di $\ell$ t.c. $I \cap A = \emptyset$

$(a_n)$ è in $A$ → $\Downarrow$

$\boxed{\forall n \quad a_n \notin I}$

$\Downarrow$

$a_n \not\to \ell$ $\quad$ **ASSURDO**

---

**Def.** Dato $K \subset \mathbb{R}$ diremo che $K$ è "compatto per successioni" se, comunque presa una successione $(a_n)$ in $K$, è sempre possibile trovare una sua sottosuccessione $(a_{n_k})$ che converge a un $\ell \in K$.

**Esempio 1 di insieme non compatto**

$$A = (0, +\infty) \qquad a_n = n$$

Da $(a_n)$ non posso estrarre alcuna sottosucc. convergente.
Quindi $A$ non è compatto

**Esempio 2 di insieme non compatto**

$$A = (0,1)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$$

ogni sottosucc. che io potrei estrarre da $a_n$, tenderà ancora a $0_{\mathbb{R}\setminus A}$ (come $a_n$), quindi non è possibile estrarre da $(a_n)$ alcuna sottosuccessione che converge ad un punto di A. Quindi A non è compatto.

**Teorema 2** Dato $K \subset \mathbb{R}$ è equivalente affermare che
1) K è "compatto per successioni"
2) K è chiuso e limitato.

**Lemma 1** Sia $(a_n)$ una successione in $\mathbb{R}$.
Se $(a_n)$ è limitata allora ha una sottosuccessione convergente ad un limite finito.

**Dim** **I° caso** $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a_n\}$ è finito. ← ovvio perché ho una sotto-succ. costante e quindi convergente

**II° caso** $\{a_n\}$ non è finito.

$\Downarrow$

Grazie al T. di B.W. esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\{a_n\}$ ha $x_0$ come punto di accumulazione.

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}-\{0\} \quad I_{\frac{1}{k}}(x_0) \cap (\{a_n\} - \{x_0\}) \text{ contiene infiniti punti}}$

**Passo 1** Prendo $a_{n_1}$ in $I_1(x_0) \cap (\{a_n\} - \{x_0\})$

**Passo 2** Prendo $a_{n_2}$ in $I_{\frac{1}{2}}(x_0) \cap (\{a_n\} - \{x_0\})$
in modo che $n_2 > n_1$

⋮

**Passo k** Prendo $a_{n_k}$ in $I_{\frac{1}{k}}(x_0) \cap (\{a_n\} - \{x_0\})$
in modo che $n_k > n_{k-1}$

⋮

Ho così costruito una sotto succ. $(a_{n_k})$ di $(a_n)$ tale che

$$|a_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k} \quad \text{, quindi } a_{n_k} \to x_0 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Dim. Teorema 2}}$ $(1) \Rightarrow (2)$

$\boxed{\text{I° parte}}$ $(1) \Rightarrow K$ è limitato

$\boxed{\text{II° parte}}$ $(1) \Rightarrow K$ è chiuso

$\boxed{\text{I° parte}}$ P.A. supponiamo $K$ non limitato

$\Downarrow$

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $I_n(0)$ non contiene tutto $K$

$\Downarrow$

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ prendo $a_n \in K$ ma tale che $|a_n| > n$

$\Downarrow$

$(a_n)$ è una successione in $K$ t.c. $|a_n| \to +\infty$

$\Downarrow$

Ma allora anche ogni $(a_{n_k})$ è tale che $|a_{n_k}| \to +\infty$, quindi non c'è modo di estrarre da $(a_n)$ una sotto-succ. convergente ad un limite finito.

$\Downarrow$

$\boxed{K \text{ non è compatto}}$ $\boxed{\text{ASSURDO}}$

Quindi, se $K$ è compatto, deve necessariamente essere limitato.

$\boxed{\text{II° parte}}$ $\boxed{K \text{ compatto} \Rightarrow K \text{ chiuso}}$

P.A. $\boxed{\text{supponiamo } K \text{ non chiuso}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\exists\, x_0 \text{ di acc. per } K \text{, ma t.c. } x_0 \notin K}$

$\Downarrow$

$\exists\,(a_n)$ in $K$ t.c. $a_n \to \underset{\notin K}{x_0}$

$\Downarrow$

anche tutte le sotto-succ. di $(a_n)$ tendono a $x_0 \notin K$

$\Downarrow$

ASSURDO

K non è compatto perché contiene una successione "cattiva", cioè dalla quale non posso estrarre alcuna sottosuccessione convergente a un punto di K

$(2) \Rightarrow (1)$

Vogliamo mostrare (usando chiuso e limitato) che $\forall (a_n)$ a valori in $K$, è possibile estrarre $(a_{n_k})$ t.c. $a_{n_k} \to x_0 \in K$. (?)

Infatti Presa $\forall\ (a_n)$ in $K$ avremo che:

1) $(a_n)$ è limitata.

Quindi:

2) esiste $(a_{n_k})$ convergente a un limite finito $x_0$.

Ma, poiché $K$ è chiuso, $x_0 \in K$ perché limite di una successione tutta contenuta in $K$.