PUNTI LIMITE – MAXLIM – MINLIM

$\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$\boxed{\text{Def}}$ Data (a_n) a valori in $\mathbb{R}$, diremo che $\boxed{\ell \in \mathbb{R}}$ è punto limite di (a_n) se esiste (a_{n_k}) t.c. $a_{n_k} \to \ell$.

$\boxed{\text{ES.1}}$ $a_n = (-1)^n$

$a_{2k} = 1 \qquad a_{2k} \to 1$

$a_{2k-1} = -1 \qquad a_{2k-1} \to -1$

PUNTI LIMITE

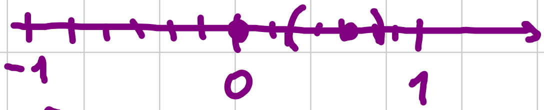
$\boxed{\text{ES.2}}$ $a_n = n^{(-1)^n}$

$a_{2k} = 2k \to +\infty$

$a_{2k-1} = \dfrac{1}{2k-1} \to 0$

PUNTI LIMITE

$\boxed{\text{ES.3}}$ $a_n = \sin n$



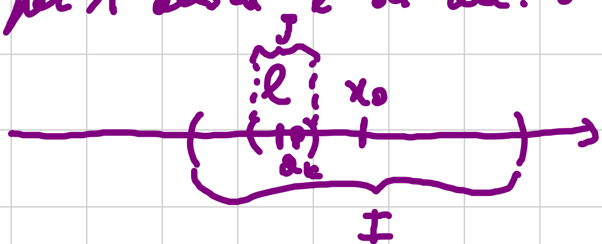
$\{a_n\}$ è denso in $[-1, 1]$

Insieme dei punti limite di (a_n) è $[-1, 1]$

$\boxed{\text{Teorema 1}}$ Data (a_n) a valori in $\mathbb{R}$, sia $A = \{\ell \in \mathbb{R} \mid \ell \text{ è punto limite di } (a_n)\}$.
Allora A è un insieme chiuso.

$\boxed{\text{Dim}}$ Vogliamo dimostrare che se x_0 è di acc. per A allora x_0 è un punto limite di (a_n).

$\boxed{\text{Oss.1}}$ Se x_0 è di acc. per A allora è di acc. anche per $\{a_n\}$.



$\forall I$ intorno di x_0, poiché x_0 è di acc. per A,

ci sarà $l \in A$ t.c. $l \in I$ e $l \neq x_0$.
Ma ricordando che $\exists (a_{n_k})$ t.c. $a_{n_k} \to l$ posso dire che $\forall$ intorno di l deve contenere qualche elemento di (a_n). Quindi basta prendere J intorno di l sufficientemente piccolo da essere contenuto in I e da non contenere x_0, che avremo la proprietà che ci serve.

A questo punto se x_0 è di acc. per $\{a_n\}$ è sempre possibile estrarre da (a_n) una sottosucc. che tende a x_0, usando lo stesso procedimento usato nella dimostrazione del Teorema che afferma che una succ. limitata ha sempre una sottosucc. convergente.
Quindi x_0 è pt. limite di (a_n), cioè $x_0 \in A$.
Quindi A contiene tutti i suoi pt. di acc., quindi A è chiuso.

$\boxed{\text{Oss.}}$ Data (a_n) e indicato $A = \{ l \in \mathbb{R} \mid l \text{ è punto limite di } (a_n) \}$

Se però A è vuoto solo $+\infty$ e $-\infty$ possono essere punti limite. (Sempre almeno uno dei due)

<u>Se A è superiormente limitato</u> allora esiste un punto limite $l_0 \in A$ che è il massimo dei punti limite finiti.

<u>Se A non è superiormente limitato</u> allora sicuramente $+\infty$ è un punto limite. Infatti se A non è sup. limitato $\forall M \in \mathbb{R}$ esiste $l \in A$ t.c. $l > M$, ma allora esiste una s. succ. (a_{n_k}) t.c. $a_{n_k} \to l$ e quindi def. in k $a_{n_k} > M$.
Ciò significa (a_n) non è limitata superiormente.
Ma allora (a_n) ha una s. succ. che $\to +\infty$.
Quindi $+\infty$ è un punto limite.

$\boxed{\text{Def.}}$ Data (a_n) definiamo $\boxed{\max\lim_{n\to+\infty} a_n}$ il più grande dei punti limite

$\boxed{\text{Nota}}$ Dalle osservazioni precedenti segue che il massimo limite esiste sempre.

$\boxed{\text{Def.}}$ Data (a_n) definiamo $\boxed{\min\lim_{n\to+\infty} a_n}$ il più piccolo dei punti limite

$\boxed{\text{NOTA}}$ Il minimo limite c'è sempre (si vede allo stesso modo del massimo limite).

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ Data (a_n) in $\mathbb{R}$ allora è equivalente affermare che

1) $a_n \to \ell$
2) $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell = \min\lim_{n\to\infty} a_n$

$\boxed{\text{Dim}}$ (solo caso $\ell \in \mathbb{R}$, $\underline{\ell = \pm\infty \text{ esercizio}}$)

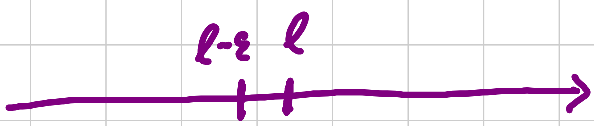
$(1) \Rightarrow (2)$ (ovvio)

$(2) \Rightarrow (1)$ Mostriamo che

(a) $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ def. in n $a_n < \ell + \varepsilon$

(b) $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ def. in n $a_n > \ell - \varepsilon$

(a) e (b) si dimostrano allo stesso modo.
Ad esempio dimostriamo (b).



$\forall \varepsilon > 0$ Vogliamo mostrare che def. in n $a_n > \ell - \varepsilon$

P.A. supponiamo che non sia così; cioè che freq. in n

$a_n \leq \ell - \varepsilon$, quindi esiste tutta una sottosuccessione di (a_n) che sta sotto a questo $\ell-\varepsilon$, che avrà quindi almeno un punto limite e questo sarà $\leq \ell - \varepsilon$
Quindi (a_n) avrebbe un punto limite $\leq \ell - \varepsilon$ (ASSURDO)
Perché ℓ = minlim

Dimostrando anche (a) in modo analogo si ottiene la tesi.

$\boxed{\text{Oss.}}$ L'insieme dei punti limite non è mai vuoto perché se né $+\infty$ né $-\infty$ sono punti limite allora (a_n) è limitata, quindi ha una sottosuccessione convergente ad un limite finito.

SUCCESSIONI DI CAUCHY

$\boxed{\text{Def.}}$ Data (a_n) in $\mathbb{R}$ diremo che è di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0}_{\text{definitivamente in } n,m}, \text{ si ha } |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{Lemma}}$ Se (a_n) è di Cauchy, allora è limitata.

$\boxed{\text{Dim}}$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \text{ si ha } |a_n - a_m| < 1$$

In particolare, $\forall n \geq n_0$ si ha $|a_n - a_{n_0}| < 1$
cioè $a_n \in (a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$.
Invece tutti gli a_n con $n < n_0$, cioè:

$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$ sono un numero finito e quindi limitato, cioè contenuto in un opportuno intervallo (a,b).

Basta quindi prendere un intervallo $(\alpha,\beta) \supset \big((a,b) \cup (a_{n_0}-1, a_{n_0}+1)\big)$, per avere che (α,β) contiene tutta (a_n), che quindi è limitata.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Data (a_n) in $\mathbb{R}$, è equivalente affermare che:

(1) (a_n) è di Cauchy

(2) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Dim}}$ $(2) \Rightarrow (1)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Di conseguenza se prendo $n, m \geq n_0$ avrò che

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \ell) + (\ell - a_m)| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$(1) \Rightarrow (2)$ Mostriamo che $\underbrace{\max\lim_{n\to+\infty} a_n}_{L} = \underbrace{\min\lim_{n\to+\infty} a_n}_{\ell}$

Prendiamo $a_{n_k} \to L$ $\quad a_{m_k} \to \ell$ sottosucc. di (a_n)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{def. in } k \quad |a_{n_k} - a_{m_k}| < \varepsilon$$

per $k \to \infty$

$$|L - \ell| \leq \varepsilon$$

Dire che $|L - \ell| \leq \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ significa dire che $L = \ell$.