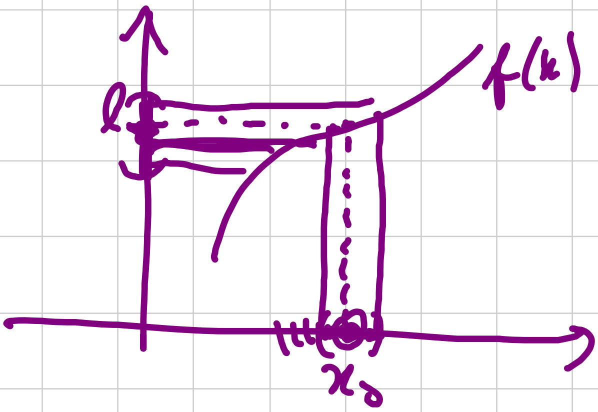
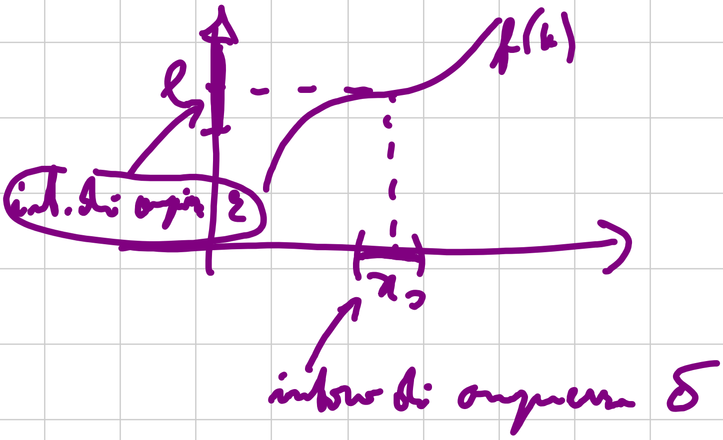
LIMITI DI FUNZIONI



Def 1 Dato $A \subset \mathbb{R}$, x_0 pt. di acc. per A e $f: A \to \mathbb{R}$.
Diremo che $\ell \in \mathbb{R}$ è $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se

$$\text{"}\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \left(x \in I_\delta(x_0) \cap (A - \{x_0\})\right) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\text{"}$$



Ex 1 $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

$|f(x) - \ell|$

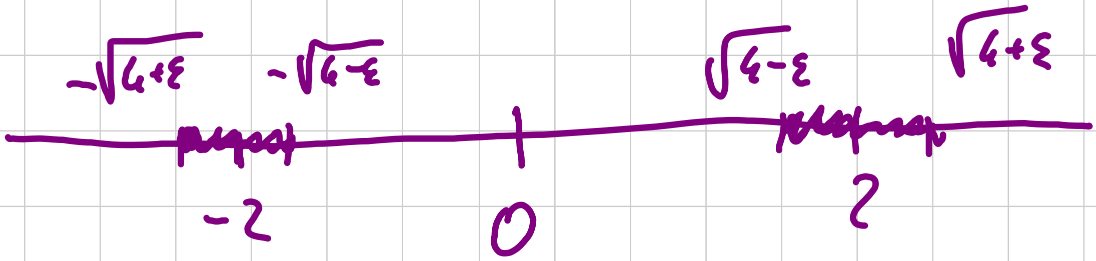
$|x^2 - 4| < \varepsilon$

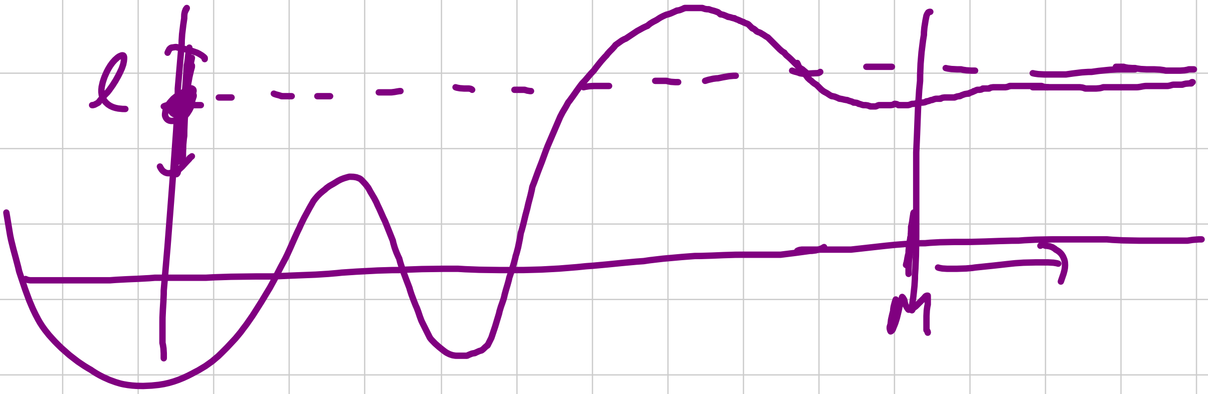
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $x \in \left(I_\delta(2) \cap (\mathbb{R} - \{2\})\right)$ allora

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon$$

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$$

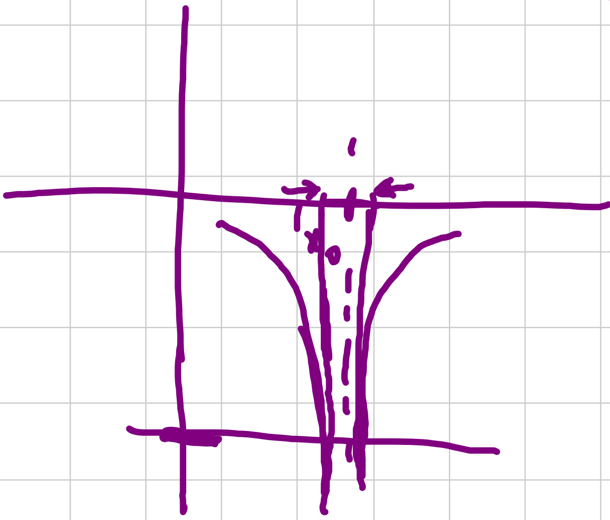
$$\sqrt{4-\varepsilon} < |x| < \sqrt{4+\varepsilon}$$





$\boxed{\text{Def. 2}}$ Data $f: A \to \mathbb{R}$ dove $A \subset \mathbb{R}$ non è superiormente limitato, e data $l \in \mathbb{R}$, diremo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se:

"$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $\big(x \in (M, +\infty) \cap A\big) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$"



Def. 3 Dati: $A \subset \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per A e $f: A \to \mathbb{R}$ diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se

$\boxed{f(x) \in (-\infty, M)}$

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \big(x \in I_\delta(x_0) \cap (A - \{x_0\})\big) \Rightarrow f(x) < M$$

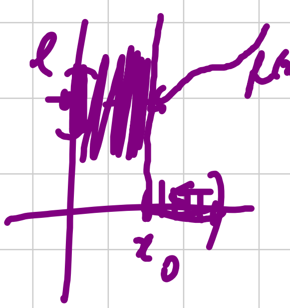
Def.: Indichiamo con $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Gli intorni degli elementi di $\mathbb{R}^*$ che stanno in $\mathbb{R}$ sono gli stessi di prima.
Invece gli intorni di $+\infty$ sono le semirette destre.
e gli intorni di $-\infty$ sono le semirette sinistre.

Def. (generale di limite).

Dato $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione per A, $f: A \to \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}^*$, diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se

$$\forall I \text{ intorno di } l \ \exists J \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } x \in J \cap (A - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I$$

Def. 4 Dato $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di acc. destro per A, e $f: A \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^*$, diremo che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ se:



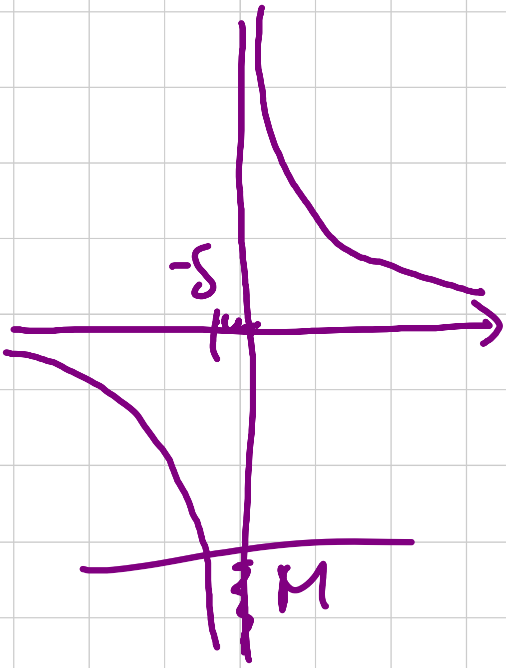
$$\forall I \text{ intorno di } l \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in I$$

(lo stesso per caso lim per $x \to x_0^-$)

$\boxed{\text{ES. 2}}$ Verificare (con la sola definizione) che $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$x \in (-\delta, 0) \Rightarrow f(x) < M$$



$$\boxed{\frac{1}{x} < M}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} < M \\ x < 0 \end{cases}$$

$M \geq 0$: tutti $x < 0$

$M < 0$:

$$\begin{cases} \boxed{\frac{1}{x} < M} \\ x < 0 \end{cases}$$

$f(x) < M$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{M} \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

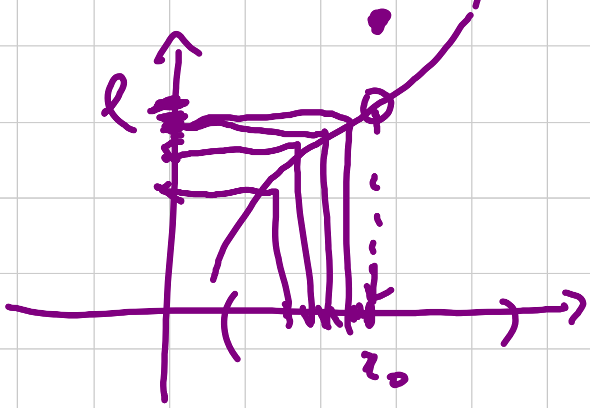
$$\boxed{x \in (-\delta, 0)} \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{1}{M}, 0\right)$$

$$\delta = -\frac{1}{M}$$

Teorema 1 (T. ponte)

Dati $A \subset \mathbb{R}$, x_0 di acc. per A, $f: A \to \mathbb{R}$ allora è equivalente affermare che:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$
2) $\forall (a_n)$ a valori in $A - \{x_0\}$ e t.c. $a_n \to x_0$, si ha $f(a_n) \to \ell$



$\boxed{\text{Dim}}$ $(1) \Rightarrow (2)$

So: $(1) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $x \in I_\delta(x_0) \cap (A - \{x_0\}) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Devo dimostrare che:

$$\Big(\big((a_n) \text{ a valori in } A - \{x_0\} \big) \text{ e } \big(a_n \to x_0 \big) \Big) \Rightarrow \boxed{f(a_n) \to \ell}$$

$$\Updownarrow$$

(?) $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \text{def. in } n \ |f(a_n) - \ell| < \varepsilon}$

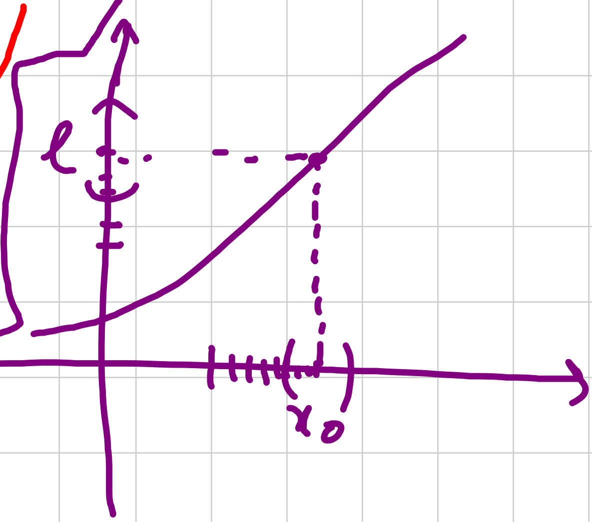
$\forall \varepsilon > 0$ Prendo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e prendo $\delta > 0$ t.c. $\boxed{I_\delta(x_0) \cap (A - \{x_0\})}$ venga tutto mandato in $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ da f. (posso grazie a (1)).
Poiché $a_n \to x_0$ e sta in $A - \{x_0\}$

avrò che a_n sta def. in n

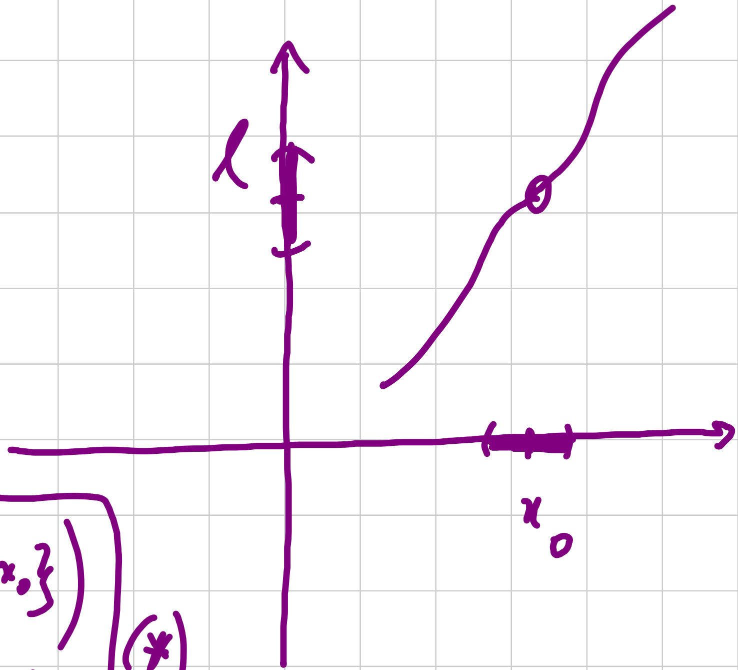
dentro

e quindi def. in n

$f(a_n) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$



$$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$$



P.A. supponiamo che f non soddisfi (1), quindi

$$\boxed{\begin{aligned} &\exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall \delta > 0 \\ &\exists x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap (A - \{x_0\}) \\ &\text{t.c. } f(x) \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \end{aligned}} \quad (*)$$

Grazie a $(*)$, $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ posso prendere a_n t.c.

$|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$ ma $f(a_n) \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

quindi ho ottenuto una (a_n) t.c. pur tendendo a x_0 ha l'immagine che NON tende a l.

(ASSURDO)