Teoremi su Limiti di Funzioni

T. 1 (Unicità del limite)

Dati $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ che sia di acc. per A e $f: A \to \mathbb{R}$. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ allora è unico.

Dim P.A. supponiamo che esistano ℓ_1 e $\ell_2 \in \mathbb{R}^*$ diversi e tali che $\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1}_{1}$ e $\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2}_{2}$

Comunque prendo (a_n) in $A - \{x_0\}$ t.c. $a_n \to x_0$

$$f(a_n) \to \ell_1 \quad , \quad f(a_n) \to \ell_2$$

(ASSURDO, invocando il T per successioni)

T 2 (Permanenza del segno)

Dati $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di acc. per A e $\ell \in \mathbb{R}^*$ con $\ell > 0$. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora

$\exists I$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in I \cap (A - \{x_0\})$ si ha $f(x) > 0$.

$\boxed{\text{Dim}}$ Se $\ell > 0$ ho sempre un intorno J fatto tutto di punti positivi.

Dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ significa dire che $\forall$ intorno di ℓ io prenda (per esempio anche J) esiste tutto un intorno I di x_0 t.c. $\forall x \in I \cap (A - \{x_0\})$ si ha $\underbrace{f(x) \in J}$

$\Downarrow$

$f(x) > 0$

$\boxed{\text{T.3}}$ (confronto) (caso finito)

Dati: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di acc. per A, e $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $\exists I$ intorno di x_0 t.c. $x \in I \cap (A - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{R}}}{\ell} = \lim_{x \to x_0} h(x)$

Allora anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

$\boxed{\text{Dim}}$ Devo dimostrare che $\forall (a_n)$ a valori in $A - \{x_0\}$ e tale che $a_n \to x_0$, si ha $g(a_n) \to \ell$.

Infatti comunque presa una tale (a_n) si ha che

1) def. in n $a_n \in I$ (l'intorno in cui vale l'ipotesi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$)

Ma allora

$$1') \text{ def. in } n \quad f(a_n) \leq \boxed{g(a_n)} \leq h(a_n)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\ell \qquad \ell \qquad \ell$$

Per T. del confronto tra successioni

Quindi $g(a_n) \to \ell$

Quindi, poiché questo vale per ogni (a_n) in $A - \{x_0\}$ t.c. $a_n \to \ell$, posso dire che $\underbrace{\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell}$

Grazie al T. Ponte

T. 3 bis (confronto) (caso limite $+\infty$)

Dati $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di acc. per A e $f, g : A \to \mathbb{R}$ t.c.:

1) $\exists I$ intorno di x_0 t.c. $x \in I \cap (A - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

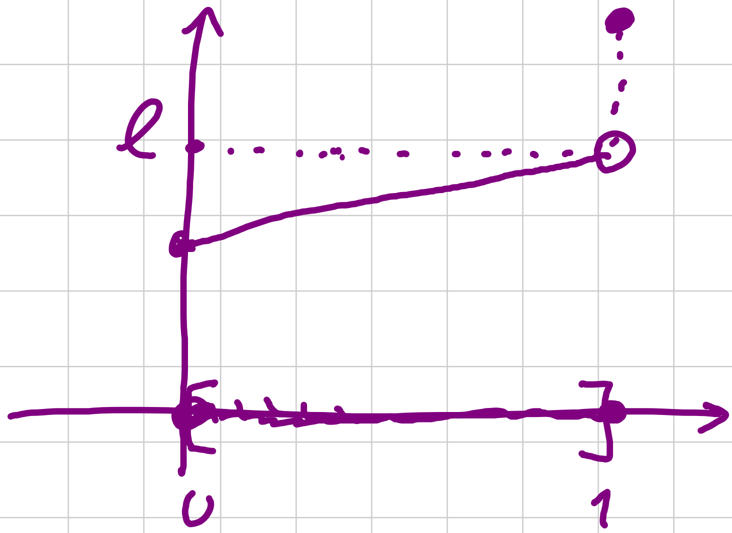
Allora anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

$\boxed{\text{Dim}}$ (Per casa) (Per casa anche caso $-\infty$)

$\boxed{\text{T. 4}}$ (limiti di f monotone)

Dati $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con x_0 di acc. per A e t.c. $x_0 = \sup A$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ crescente.

Allora esiste $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in A - \{x_0\}} f(x)$



$\boxed{\text{Dim}}$ Chiamiamo $S = \sup_{x \in A - \{x_0\}} f(x)$

Vogliamo mostrare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = S$

Distinguiamo 2 casi: $S=+\infty$ (per casa) e $S\in\mathbb{R}$ (facciamo qui)

Dobbiamo mostrare che

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists I \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } x\in I\cap(A-\{x_0\}) \Rightarrow S-\varepsilon<f(x)<S+\varepsilon$$

gratis

Poiché $S-\varepsilon$ non è maggiorante (visto che $S=\sup$) avremo che $\exists\,\bar{x}\in A-\{x_0\}$ t.c. $f(\bar{x})>S-\varepsilon$.

Poiché f è crescente, $\forall$ ogni $x\in A-\{x_0\}$ t.c. $x\geq\bar{x}$ avremo che $f(x)\geq f(\bar{x})>S-\varepsilon$

Quindi $x\in(\bar{x},x_0)\cap(A-\{x_0\}) \Rightarrow f(x)>S-\varepsilon$

Quindi ho dimostrato che $\lim_{x\to x_0} f(x)=S$.

$\boxed{\text{Teorema 5}}$ (operazioni tra limiti)

Dati $A\subset\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}^*$ punto di acc. per A e $f,g:A\to\mathbb{R}$. Allora:

1) $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R} \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}\right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\ell_1+\ell_2$

2) $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R} \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}\right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\ell_1\cdot\ell_2$

3) $\left(f(x)\to\ell_1\in\mathbb{R} \text{ e } g(x)\to\ell_2\in\mathbb{R}-\{0\} \ (\text{per } x\to x_0)\right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$

$\boxed{\text{Dim}}$ (Solo (1), altre per casa)

$$\boxed{\text{Per } x \to x_0 \quad f(x) \to \ell_1 \quad e \quad g(x) \to \ell_2}$$

$$\boxed{\forall (a_n) \text{ in } A - \{x_0\} \text{ con } a_n \to x_0 \text{ si ha } f(a_n) \to \ell_1 \ e \ g(a_n) \to \ell_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\forall (a_n) \text{ in } A - \{x_0\} \text{ con } a_n \to x_0 \text{ si ha } f(a_n) + g(a_n) \to \ell_1 + \ell_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\text{per } x \to x_0 \quad f(x) + g(x) \to \ell_1 + \ell_2}$$

$\boxed{\text{Per Casa Estensioni T. operazioni sui limiti}}$

$\boxed{\text{Teorema 6}}$ (Catena degli infiniti notevoli)

Siano $a > 1$, $\alpha > 0$ allora si ha

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^x = +\infty$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$ 6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^x} = 0$

$\boxed{\text{Dim}}$ Tutte nello stesso maniera, ad esempio vediamo (5).

Per mostrare che $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$.

Il teorema Ponte mi garantisce che basta mostrare che $\forall (a_n)$ t.c. $a_n \to +\infty$ si ha

$$\frac{\log_a(a_n)}{(a_n)^\alpha} \to 0$$

(Ma questo lo so grazie al Teorema analogo per le succ)

$\boxed{\text{Altro limite}}$ (notevole)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

grazie a T.Ponte e a

Sappiamo già che se $a_n \to +\infty$ allora

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

$\boxed{\text{Esempio 1}}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln x}{\tan(\arctan x) + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln x}{x + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}_{1}} = 1$$

Es. 2

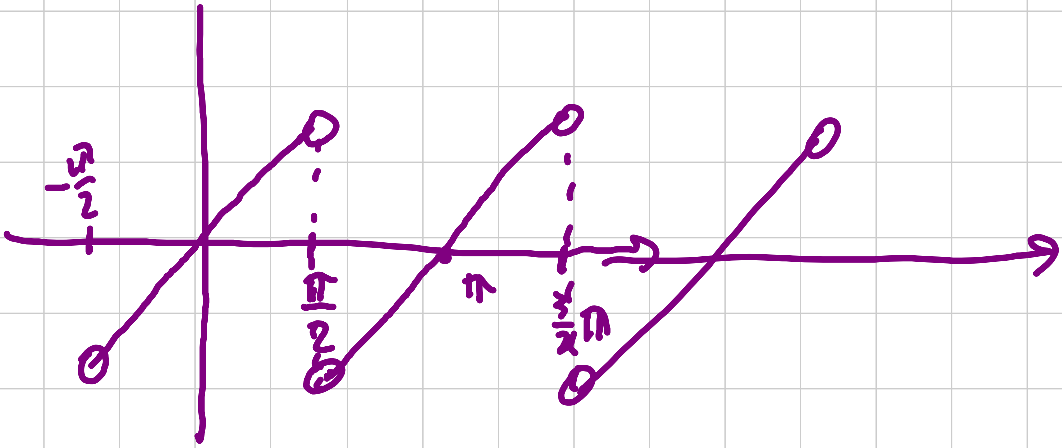
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan(\tan x)}{x + \sin^2 x} = 0$$

$$\underbrace{\frac{-\frac{\pi}{2}}{x+\sin^2 x}}_{\downarrow\, 0} \le \underbrace{\frac{\arctan(\tan x)}{x+\sin^2 x}}_{\downarrow\, 0} \le \underbrace{\frac{+\frac{\pi}{2}}{x+\sin^2 x}}_{\downarrow\, 0} \qquad x+\sin^2 x \to +\infty$$

NOTA

se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

allora $\arctan(\tan x) = x$



Esempio

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

MODO MACCHINOSO
VERIFICO CHE
$\forall a_n \to 0^+$
è vera.

MI SERVE
T. DEL LIMITE
DI FUNZIONI COMPOSTE