LIMITE DI FUNZ. COMPOSTE

ES. 1

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{y\to +\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

Pongo $y=\frac{1}{x}$

---

o

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y) = \dots$$

Pongo $y=g(x)$

NON SEMPRE SI PUÒ

ES. 2 (cattivo)

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1$$

NO

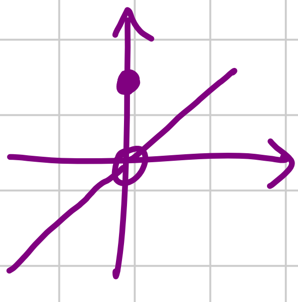
OSS.

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

$\lim_{y\to 0} f(y) = 0$

$g(x) \equiv 0$ (costante)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$$



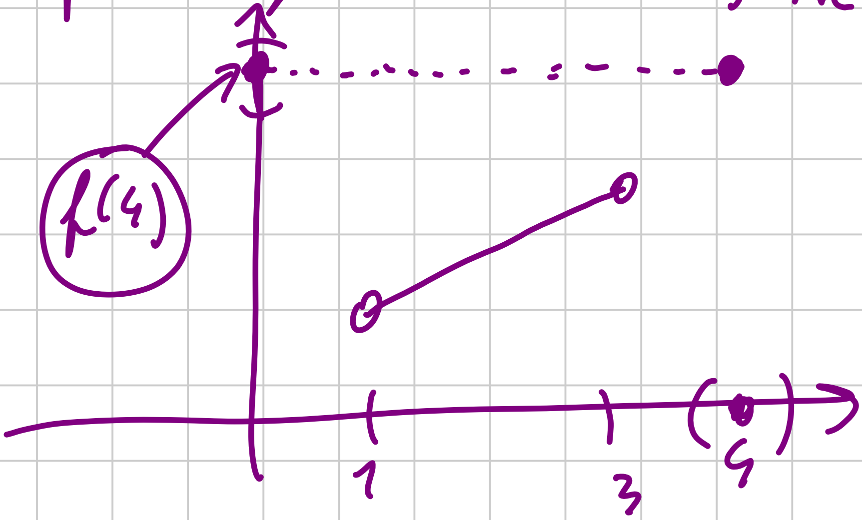
$$= \lim_{y \to 0} f(y) = 0$$

pongo $y = g(x)$

$\boxed{\text{Def}}$ Dati $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f: A \to \mathbb{R}$, diremo che f è continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in I_\delta(x_0) \cap A$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

OSS. f è sempre continua in x_0 se x_0 è isolato



$\boxed{\text{Teorema Ponte per } f \text{ continue}}$

Dati $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f: A \to \mathbb{R}$.

Allora è equivalente affermare che

1) f è continua in x_0.

2) $\forall (a_n)$ a valori in A, se $a_n \to x_0$ allora $f(a_n) \to f(x_0)$

Teorema del Limite di funz. composta

Dati $A, B \subset \mathbb{R}$ x_0 di acc. per A e y_0 di acc. per B

$g: A \to B$ e $f: B \to \mathbb{R}$ tali che:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \qquad \lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$$

Inoltre supponiamo che valga almeno una delle seguenti 2 ipotesi:

1) f è continua in y_0

2) $\exists I$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in I \cap (A - \{x_0\})$ $g(x) \neq y_0$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell$.

DIM Mi basta mostrare che $\forall (a_n)$ a valori in $A - \{x_0\}$, se $a_n \to x_0$ allora $f(g(a_n)) \to \ell$

Nel caso 1) se $a_n \to x_0$ so che $g(a_n) \to y_0$

Dopodiché, essendo f continua in y_0, si ha che $f(g(a_n)) \to \ell = f(y_0)$

Nel caso 2) se $a_n \to x_0$ so che $g(a_n) \to y_0$ "senza toccarlo"

Di conseguenza $f(g(a_n)) \to \ell$

(per il T.P. "normale")