Analisi Matematica 1 - Lezione 15 (II parte)

Titolo nota 5 Novembre 2015 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

www.problemisvolti.it

Teorema: Le funzioni elencate di seguito sono continue in tutto il loro dominio naturale:

1) $f(x) = x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$
2) $f(x) = a^x \qquad \text{con } a > 0$
→ 3) $f(x) = \log_a x \qquad \text{con } a > 0 \text{ e } \neq 1$
4) $f(x)$ funzione trigonometrica diretta o inversa

$\boxed{\text{Dim}}$ (3) Per dimostrare che $\log_a x$ è continua in $x_0 > 0$ dobbiamo dimostrare che se $a_n \to x_0$ allora $\log_a(a_n) \to \log_a(x_0)$

Ma sappiamo che questo è vero grazie ad un teorema sulle successioni (già visto). Quindi $\log_a x$ è continua in x_0.

Lo stesso per (1) (2) e (4)

$\boxed{\text{LIMITI NOTEVOLI}}$

1) $$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

2) $$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

pongo $y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

0^- $\qquad$ 0^-

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \to 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$$

e

4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(e^x-1+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+(e^x-1))}\overset{\text{Pongo } y=e^x-1}{=}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad \alpha\in\mathbb{R}$

se $\alpha=0$ è ovvio

Se $\alpha\neq 0$ vale questo calcolo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln((1+x)^\alpha)}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}}}_{\downarrow\,1}\cdot\underbrace{\alpha}_{\downarrow\,\alpha}\underbrace{\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x}}}_{\downarrow\,1}=\alpha$$

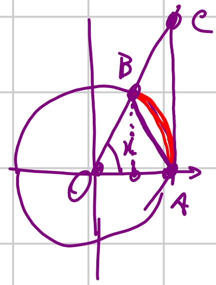
ho posto $y=\alpha\ln(1+x)$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$$

---

6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \;\Leftarrow\; \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

$\boxed{\sin x\le x\le \tan x}$ se $0<x<\frac{\pi}{2}$



$$\text{area}(A\hat{O}B)\le \text{area}(\text{settore } OAB)\le\text{area}(O\hat{A}C)$$

$$\frac{1\cdot\sin x}{2}\le\frac{1\cdot x}{2}\le\frac{1\cdot\tan x}{2}$$

$$\boxed{\underset{\downarrow\,1}{1}\le \underset{\downarrow\,1}{\frac{x}{\sin x}}\le \underset{\downarrow\,1}{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}}$$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\downarrow \, 1} = 1$$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \Big(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow \, 1}\Big)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\downarrow \, \frac{1}{2}} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

9) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\downarrow \, \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\downarrow \, 1} = \frac{1}{2}$$