Analisi Matematica 1 - Lezione 16 (I parte)

Titolo nota 9 Novembre 2015 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

O-PICCOLI - ASINTOTICHE EQUIVALENZE

Def. Dati $A \subset \mathbb{R}$, x_0 di acc. per A, $f, g : A \to \mathbb{R}$ che siano entrambe infinitesime (infinite) per $x \to x_0$, diremo che:

1) $f(x) \approx g(x)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

   $\sin x \approx x$ per $x \to 0$

2) $f(x)$ ha lo stesso ordine di infinitesimo (infinito) di $g(x)$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ finito e non nullo.

   $(1-\cos x)$ ha lo stesso ordine di (x^2) per $x \to 0$

3) $f(x) = o(g(x))$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

   $x^2 = o(e^x)$ per $x \to +\infty$

4) $f(x) = O(g(x))$ se $\exists K > 0$ t.c. def. per $x \to x_0$ si ha $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < K$

   $(x + x^2 \sin x) = O(x^2)$ per $x \to +\infty$

   $\left|\frac{x + x^2 \sin x}{x^2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{x} + \sin x}{1}\right| < 2$

ALGEBRA DEGLI O-PICCOLI

Teorema Dati $A \subset \mathbb{R}$, x_0 di acc. per A e $f, g, h, k : A \to \mathbb{R}$ tutte infinitesime (infinite) per $x \to x_0$. Allora si ha che:

1) $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) = o(h(x)) \Rightarrow f(x) = o(h(x))$

   $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \qquad \frac{g(x)}{h(x)} \to 0$

   $\frac{f(x)}{h(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\to 0} \to 0$

2) $f(x) = o(g(x))$ e $h(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) \overset{(-)}{+} h(x) = o(g(x))$

   $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$

   $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \qquad \frac{h(x)}{g(x)} \to 0$

   $\frac{f(x) \mp h(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \mp \frac{h(x)}{g(x)} \to 0$

3) $f(x) = o(g(x))$ e $h(x) \neq 0 \Rightarrow f(x)\cdot h(x) = o(g(x)\cdot h(x))$

$f(x) = o(g(x))$ e $h(x) = o(k(x)) \Rightarrow f(x)\cdot h(x) = o(g(x)\cdot k(x))$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \qquad \frac{f(x)\cdot \cancel{h(x)}}{g(x)\cdot \cancel{h(x)}} \to 0 \ (?)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \qquad \frac{h(x)}{k(x)} \to 0$$

$$\frac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot k(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{h(x)}{k(x)}}_{\to 0} \to 0$$

4) Se $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine di (infinito) infinitesimo allora $h(x) = o(f(x)) \iff h(x) = o(g(x))$

$$\frac{h(x)}{f(x)} \to 0$$

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$$

finito $\ell \neq 0$

$$\frac{h(x)}{g(x)} \to 0$$

5) $f(x) \simeq g(x) \iff f(x) - g(x) = o(f(x)) \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$$

$$\frac{f(x) - g(x)}{f(x)} \to 0$$

$$1 - \frac{g(x)}{f(x)} \to 0$$