Analisi Matematica 1 - Lezione 20

Titolo nota 12 Novembre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

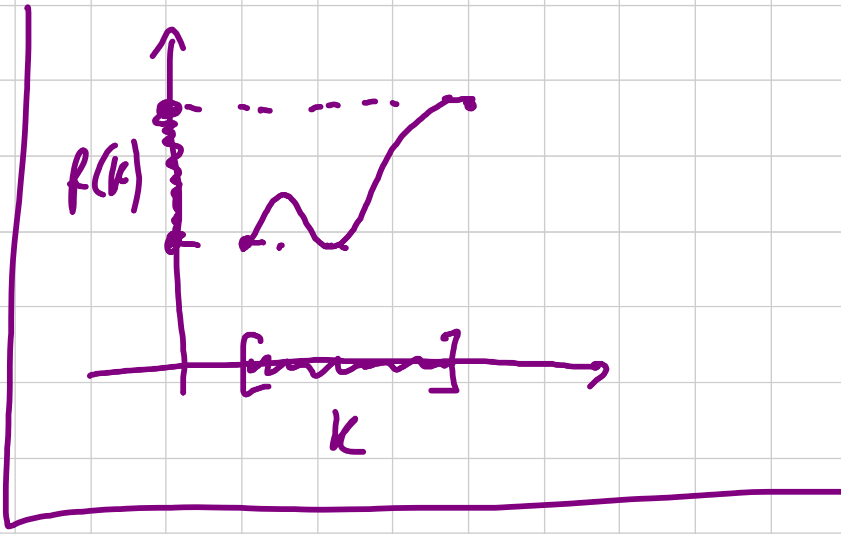
FUNZIONI CONTINUE SU COMPATTI

T1 — T. di WEIERSTRASS

Dati $K \subset \mathbb{R}$ compatto e $f: K \to \mathbb{R}$ continua, allora $f(K)$ è compatto.

Dim

Vogliamo mostrare che comunque presa (y_n) in $f(K)$ è sempre possibile estrarre (y_{n_k}) t.c. $y_{n_k} \to y_0 \in f(K)$ (?)



Presa una qualunque (y_n) in $f(K)$ prendiamo (x_n) in K t.c. $f(x_n) = y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Poiché K è compatto, posso estrarre da (x_n) una (x_{n_k}) t.c. $x_{n_k} \to x_0 \in K$.

Prendo ora (y_{n_k}) la corrispondente sottosucc. di (y_n)

Si ha $y_{n_k} = f(\underset{\substack{\downarrow \\ x_0}}{x_{n_k}}) \to f(x_0) = y_0 \in f(K)$

Corollario Dato $K \subset \mathbb{R}$ compatto e $f: K \to \mathbb{R}$ continua, allora f ha massimo e minimo in K.

Dim Poiché $f(K)$ è compatto, è anche chiuso e limitato.

$f(K)$ limitato $\Rightarrow$ $\boxed{a = \inf f(K) \text{ e } b = \sup f(K) \text{ sono finiti}}$

$f(K)$ è chiuso $\Rightarrow a, b \in f(K) \Rightarrow a = \min f(K)$, $b = \max f(K)$

Quindi $\exists^{\text{no}}$ $x_1 \in K$ e $x_2 \in K$ t.c. $f(x_1)$ è max e $f(x_2)$ è min.

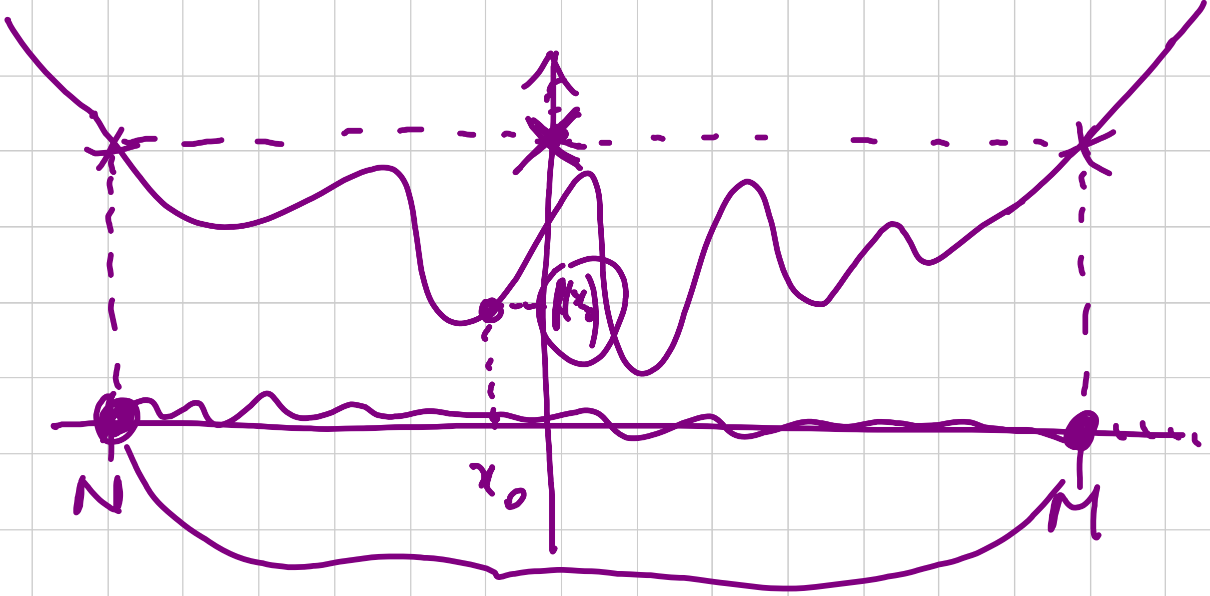
ES1 Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \sin x^2 + \cos x^2 + 7e^{-x} + e^{x}$$

mostrare che ha minimo.

Di f so che:

1) f è continua
2) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$



Prendo x_0 a caso in $\mathbb{R}$ e prendo il corrispondente valore $f(x_0)$. Prendo poi un intervallo $[N, M]$ t.c. $\forall x \notin [N, M]$ si abbia $f(x) > \lambda \geq f(x_0)$

(posso farlo perché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$)

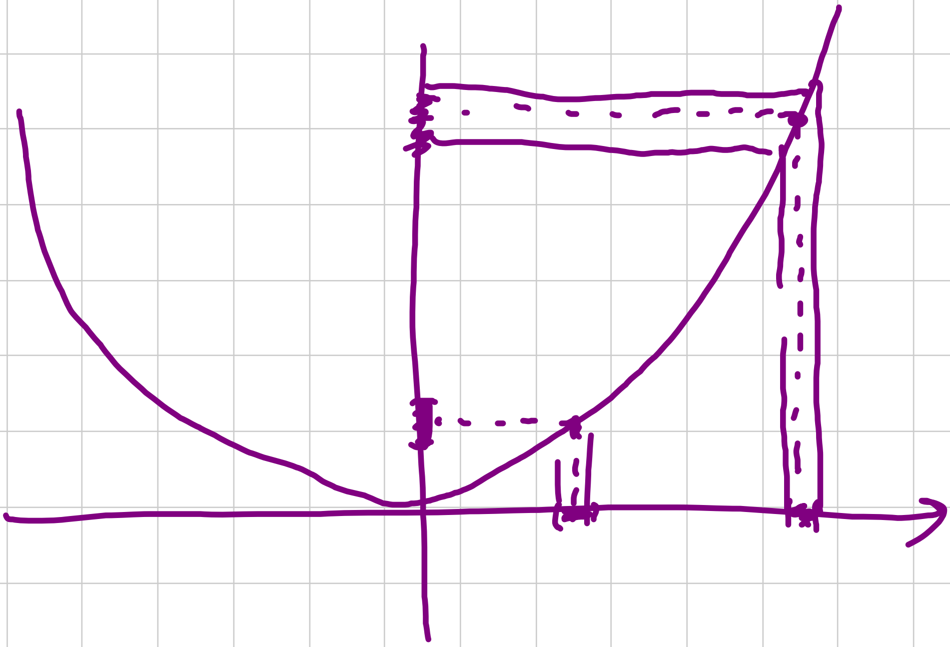
Per come è stato scelto l'intervallo

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{x \in [N,M]} f(x) =$$ esiste per T. di Weierstrass.

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

ES. 2 funzione "buonissima" ma non continua in modo uniforme.

$f(x) = x^2$ definita su tutto $\mathbb{R}$.



Def. Dati $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ diremo che f è uniformemente continua in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

T.2 (Heine-Cantor)

Dato $K \subset \mathbb{R}$ compatto e $f: K \to \mathbb{R}$ continua, allora f è uniformemente continua in K.

Dim. P.A. supponiamo che non sia uniformemente continua cioè che non sia vero che:

$$\sim \boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad \forall x_1, x_2 \in K \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon}$$

(*)
$$\boxed{\exists \varepsilon_0 > 0 \quad t.c. \quad \forall \delta > 0 \quad \exists^{\underline{no}}\, x_1, x_2 \in K \quad t.c. \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad \text{ma} \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0}$$

Grazie a (*) $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ posso scegliere in K a_n e b_n t.c. $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ ma $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0$

Considero le successioni (a_n) e (b_n).

Poiché K è compatto, estraggo da (a_n) la sottosucc. (a_{n_k}) t.c. $a_{n_k} \to x_0 \in K$

Osserviamo che
$$b_{n_k} = (\underbrace{b_{n_k} - a_{n_k}}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{a_{n_k}}_{\downarrow \atop x_0}) \to x_0$$

Ricordiamo però che
$$\underbrace{\boxed{|\underbrace{f(a_{n_k})}_{\downarrow \atop f(x_0)} - \underbrace{f(b_{n_k})}_{\downarrow \atop f(x_0)}|}}_{\downarrow \atop 0} \geq \varepsilon_0$$

$\boxed{\text{ASSURDO}}$

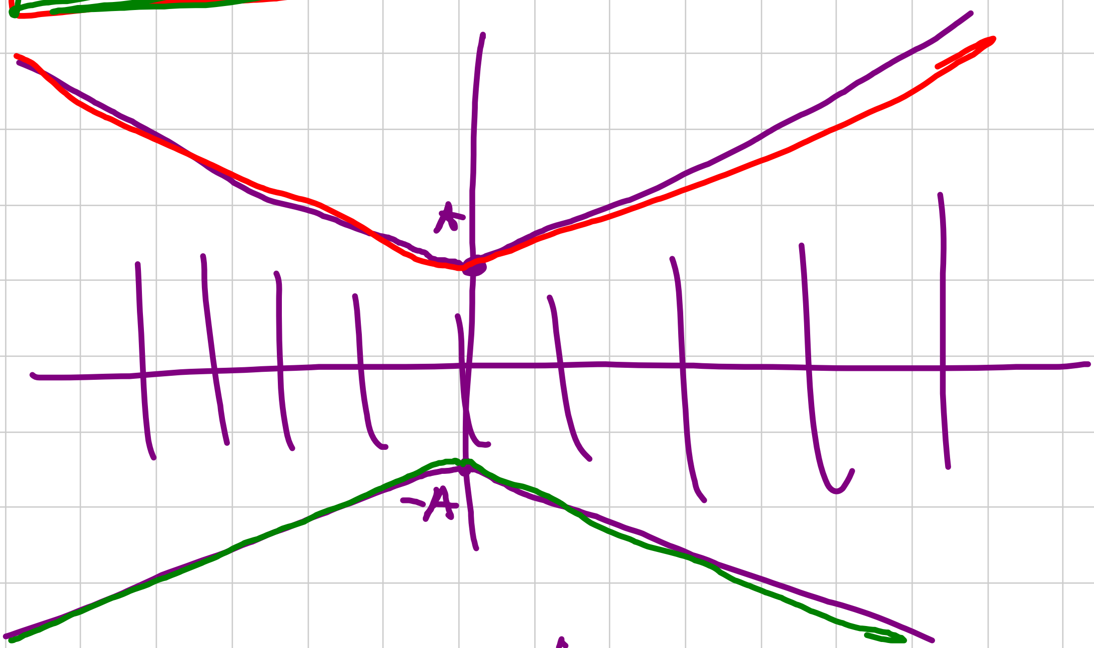
Quindi è assurdo supporre che f non sia uniformemente continua.

T. 3 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniformemente continua, Allora f è sublineare, cioè esistono 2 costanti $A>0$ e $B>0$ t.c. $\forall x\in\mathbb{R}$

$$|f(x)| < A + B|x|$$

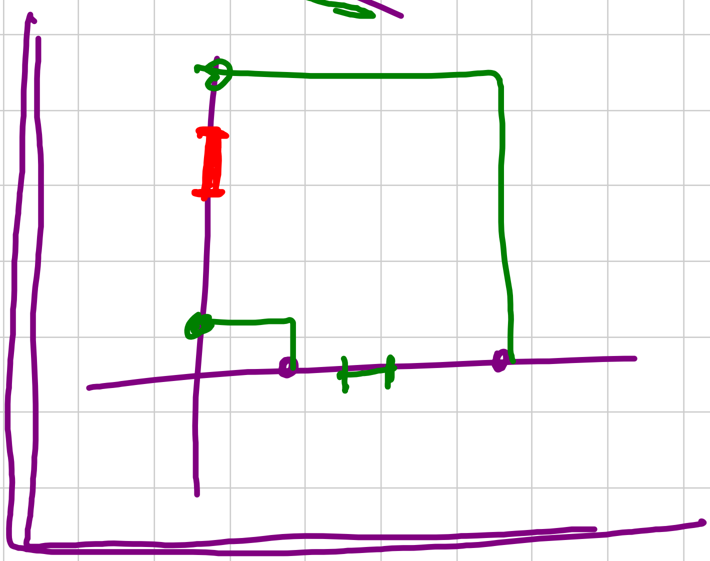
Oss. La condizione $|f(x)| < A+B|x|$ è come dire

$$\boxed{-A-B|x|} < f(x) < \boxed{A+B|x|}$$



Dim.

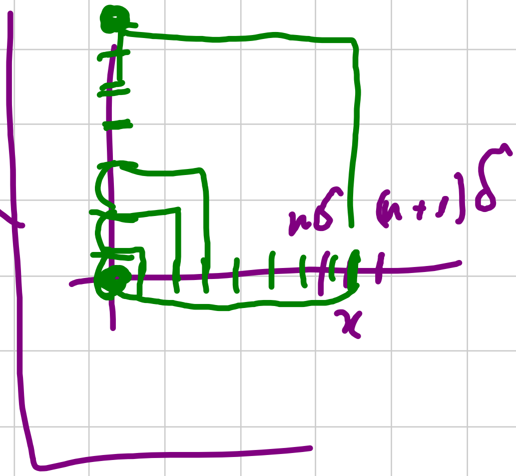
Preso $\varepsilon = 1$ sia $\delta>0$ t.c. $|x_1-x_2|\leq\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<1$



Osserviamo che, se $n\delta < \underbrace{|x|} \leq (n+1)\delta$

Allora

$$\underbrace{|f(x)-f(0)|} \le (n+1) =$$



$$= 1 + \frac{n\cdot\delta}{\delta} < \underbrace{1+\frac{1}{\delta}|x|}$$

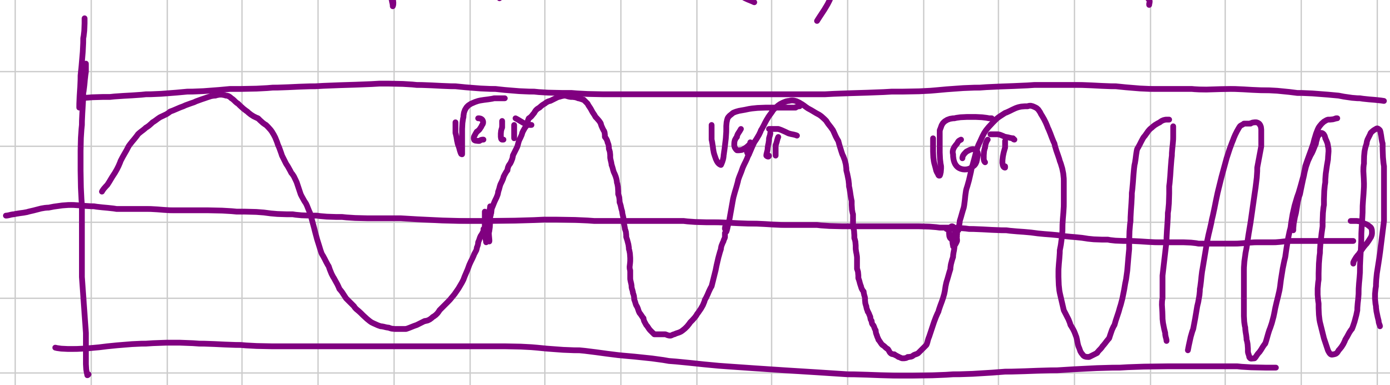
$$|f(x)| = |f(x)-f(0)+f(0)| \le$$

$$\le |f(0)| + |f(x)-f(0)| \le |f(0)| + 1 + \frac{1}{\delta}|x| =$$

$$= \underbrace{(|f(0)|+1)}_{A} + \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{B}\cdot|x|$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$ Dire se è unif. continua la funzione

$$f(x) = \sin(x^2) \quad \text{su } \mathbb{R}$$



Ciclo k-esimo è tra $\sqrt{2(k-1)\pi}$ e $\sqrt{2k\pi}$

Quindi la "lunghezza del ciclo" è :

$$\sqrt{2k\pi} - \sqrt{2(k-1)\pi} = \frac{2k\pi - 2(k-1)\pi}{\sqrt{2k\pi} + \sqrt{2(k-1)\pi}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2k\pi} + \sqrt{2(k-1)\pi}} \to 0$$

per $k \to +\infty$

Mostriamo che non è uniformemente continua.

Infatti preso $\varepsilon_0 = 1$, comunque prendo $\delta > 0$ basta prendere k t.c. $[\sqrt{2(k-1)\pi}, \sqrt{2k\pi}]$ abbia lunghezza $< \delta$, prendo x_1 e x_2 in $\circledast$ in modo che $\sin(x_1^2) = -1$ e $\sin(x_2^2) = 1$, avremo quindi che $|\sin(x_1^2) - \sin(x_2^2)| = 2 > \varepsilon_0$

Def. Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ diremo che f è Lipschitziana con costante di Lipschitz $L > 0$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ distinti: } \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq L$$