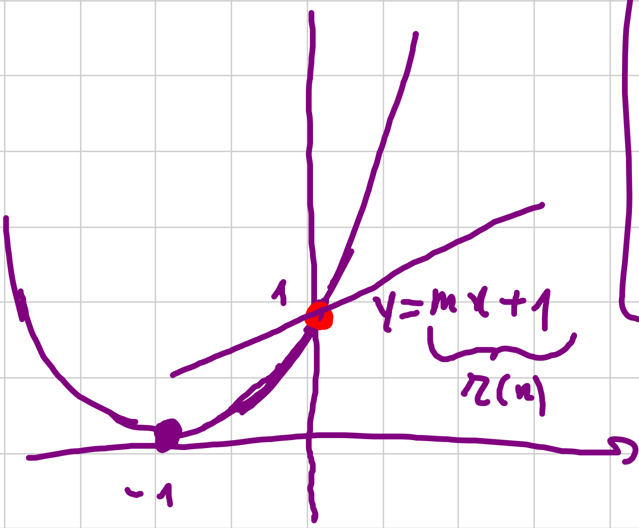
Analisi Matematica 1 - Lezione 21

Titolo nota 13 Novembre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

CALCOLO DIFFERENZIALE

ES. 1 $f(x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$



Problema: trovare la retta che la approssima "meglio" per $x=0$

$$f(x) - r(x) = x^2+2x+\cancel{1} - (mx+\cancel{1}) = x^2 + \underbrace{(2-m)}\,x =$$

se $m \neq 2$: $\rightarrow 0$ di ordine 1

se $m = 2$: $= o(x)$

$y = 2x+1$ retta tangente

Def. Dati $A \subset \mathbb{R}$, x_0 interno ad A ed $f: A \to \mathbb{R}$ diremo che $y = ax+b$ è retta tangente ad f nel punto $x = x_0$ se

$$\boxed{f(x) - (ax+b) = o(x-x_0) \quad \text{per } x \to x_0}$$

$\boxed{T.1}$ Dati $A \subset \mathbb{R}$, x_0 interno ad A ed $f: A \to \mathbb{R}$, esiste al più una retta tangente a f in $x = x_0$.

$\boxed{\text{Dim}}$ P.A. supponiamo che esistono 2 rette tangenti

$$y = a_1(x - x_0) + b_1 = r_1(x)$$

$$y = a_2(x - x_0) + b_2 = r_2(x)$$

$$f(x) - r_1(x) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$f(x) - r_2(x) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

Ma allora

$$\boxed{r_1(x) - r_2(x)} = \big(r_1(x) - f(x)\big) + \big(f(x) - r_2(x)\big) =$$

$$= o(x - x_0) + o(x - x_0) = \boxed{o(x - x_0)}$$

$$= \boxed{(a_1 - a_2)(x - x_0) + (b_1 - b_2)} \quad (*)$$

Dal fatto che $(*) \to 0$ segue che $b_1 = b_2$

e dal fatto che è $o(x - x_0)$ segue che $a_1 = a_2$

Quindi $r_1(x) = r_2(x)$

Def. Dati $A \subset \mathbb{R}$, x_0 interno ad A e $f: A \to \mathbb{R}$, diremo che f è derivabile in x_0 se esiste finito:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{f'(x_0)}_{\text{derivata di } f \text{ in } x_0}$$

Oss. Se f è derivabile in x_0 allora è anche continua in x_0, perché:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + f(x) - f(x_0) \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}}_{f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{0} \right) = f(x_0)$$

Teorema 2 Dati $A \subset \mathbb{R}$, x_0 interno ad A e $f: A \to \mathbb{R}$, è equivalente affermare che:

1) f è derivabile in x_0 con derivata $m \in \mathbb{R}$

2) f ha retta tangente in x_0 con pendenza $m \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $(2) \Rightarrow (1)$

$$(2) \Leftrightarrow y = \overbrace{m(x-x_0) + f(x_0)}^{r(x)} \quad \text{è tangente}$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x) - r(x)\big) + r(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{o(x-x_0) + \overbrace{m(x-x_0) + \cancel{f(x_0)}}^{r(x)} - \cancel{f(x_0)}}{x - x_0} = m$$

$(1) \Rightarrow (2)$

$$f(x) - r(x) = o(x-x_0) \quad \cancel{(??)}$$

$$f(x) - \big(m(x-x_0) + f(x_0)\big) = o(x-x_0) \quad \cancel{(??)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \big(m(x-x_0) + f(x_0)\big)}{x - x_0} = 0 \quad \cancel{(??)}$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{m\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}} \right) = m - m = 0$$

CALCOLO DELLA DERIVATA

$\boxed{\text{ES. 1}}$ $f(x) = \text{costante}$

$f'(x_0) = 0$ per ogni x_0 Perché:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ $f(x) = x$

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad f'(x_0) = 1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{x - x_0}^{\,1}}{\cancel{x - x_0}_{\,1}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$ $f(x) = \sin x$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \cos x_0$

$h = x - x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin x_0 (\cos h - 1)}{h} + \frac{\sin h \cdot \cos x_0}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\sin x_0 \underbrace{\frac{1 - \cos h}{h}}_{\to 0} + \cos x_0 \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right) =$$

$$= -\sin x_0 \cdot 0 + \cos x_0 \cdot 1 = \boxed{\cos x_0}$$

Def. Data $A \subset \mathbb{R}$ aperto ed $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di A, definiamo funzione derivata di f la funzione

$$f' : A \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

ES 4 $(\cos x)' = -\sin x$ (per casa)

ES. 5 $f(x) = e^x$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e

$f'(x) = e^x$

Infatti, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x_0} \cdot \left(e^{x-x_0} - 1\right)}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

1

$\boxed{\text{ES. 6}}$ $f(x) = \ln x$ è derivabile in tutto il dominio $(0, +\infty)$ e la derivata è $\frac{1}{x}$.

Infatti $\forall x_0 \in (0, +\infty)$ si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \qquad h = x - x_0$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cancel{h}}{x_0}}{\cancel{h}} = \frac{1}{x_0}$$

$\boxed{\text{T3}}$ (operazioni con le derivate)

Dati $A \subset \mathbb{R}$, x_0 interno ad A e $f, g : A \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0. Allora:

1) $f+g$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

3) se inoltre $g(x_0) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$\boxed{\text{Dim}}$

$\boxed{1}$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

$\boxed{2}$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x_0) + f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\left(g(x) - g(x_0)\right) + g(x_0)\left(f(x) - f(x_0)\right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\underbrace{\boxed{f(x)}}_{\boxed{f(x_0)}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}}_{g'(x_0)} + \underbrace{\boxed{g(x_0)}}_{g(x_0)} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}}_{f'(x_0)} \right) =$$

$$= f(x_0)\, g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0)$$

$\boxed{3}$ $$\lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\boxed{g(x_0) - g(x)}}{\underbrace{(x - x_0)}_{-g'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{g(x_0)} \underbrace{g(x_0)}_{g(x_0)}} = - \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$

$$= f'(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)\cdot f(x_0) =$$

$$= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} - \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\cdot f(x_0) =$$

$$= \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - g'(x_0)\,f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$\boxed{\text{ES. 7}}$ $\quad D(x^n) = n x^{n-1} \quad (*)$ $\qquad D(f) = g$

$$D(x^2) = D(x\cdot x) = D(x)\cdot x + x\cdot D(x) =$$

$$= 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x$$

$$D(x^3) = D(x\cdot x^2) = D(x)\cdot x^2 + x\cdot D(x^2) =$$

$$= 1\cdot x^2 + x\cdot 2x =$$

$$= 3x^2$$

In generale se è vera la formula $(*)$ fino ad $n=k$, per $n=k+1$ si ottiene

$$\boxed{D(x^{k+1})} = D(x\cdot x^k) = D(x)\cdot x^k + x\cdot D(x^k) =$$

$$= 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} =$$

$$= x^k + k x^k = \boxed{(k+1) x^k}$$

Quindi formula vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.