Analisi Matematica 1 - Lezione 27

Titolo nota 27 Novembre 2014 - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

DE L'H. e TAYLOR

T.1 DE L'H.

Date $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ continue in $[a,b)$ e derivabili in (a,b), supponiamo inoltre che $f(a) = g(a) = 0$!

Infine supponiamo che $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ finito

Allora $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

ESEMPIO 1 C'è $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ma $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non c'è.

$$f(x) = 2x + \sin x$$

$$g(x) = 2x + \cos x$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x) + \overbrace{\sin x}^{o(2x)}}{(2x) + \underbrace{\cos x}_{o(2x)}} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\boxed{\frac{2+\cos x}{2-\sin x}}}_{H(x)} = \text{NON } \exists$$

$$a_n = 2\pi n$$

$$H(a_n) = \frac{2+\cos(2\pi n)}{2-\sin(2\pi n)} = \frac{3}{2} \quad \forall n$$

$$b_n = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$$

$$H(b_n) = \frac{2+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)}{2-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)} = \frac{2}{3} \quad \forall n$$

Ora $a_n \to +\infty$ $b_n \to +\infty$

ma $H(a_n) \to \frac{3}{2}$ e $H(b_n) \to \frac{2}{3}$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} H(x)$ non esiste.

$\boxed{\text{Dim}}$

Cauchy

$$\boxed{\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} =$$

$$= \lim_{x\to a^+}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \quad \text{dove } c_x\in(a,x)$$

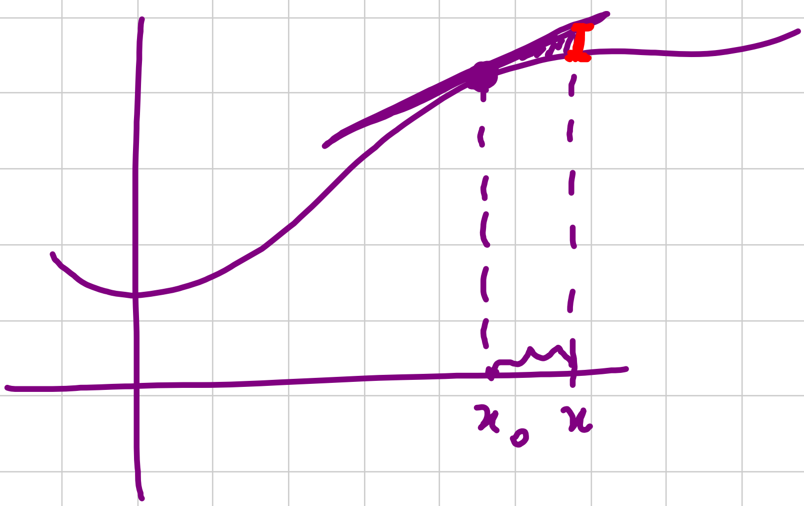
$t = c_t$

$$= \lim_{t \to a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \boxed{\ell}$$

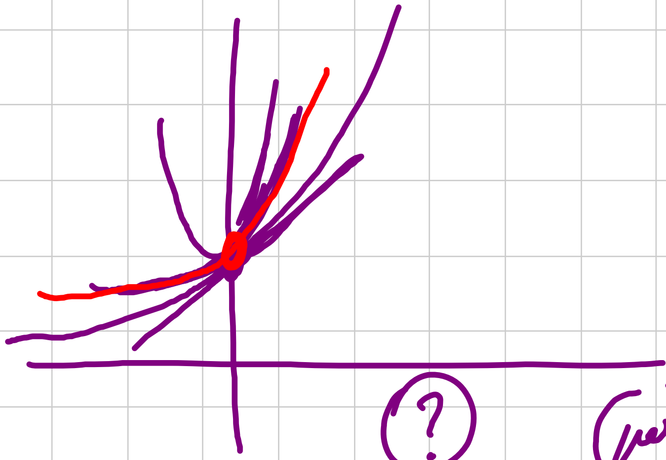
$\boxed{\text{Esempio}}$ (per capire che è meglio non usarlo)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x^2}{\sin(\sin(\sin(\sin x)))} = \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x}} = 0$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 \tan x^2 \cdot (1 + \tan^2 x^2) \cdot 2x}{\cos(\sin(\sin(\sin x))) \cdot \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x} = 0$$



$\boxed{\text{ES.}}$ Qual è la parabola che "approssima meglio" la funzione e^x nel punto $x = 0$



?

per $x \to 0$

$\exists a$ t.c.

$$e^x - \left(1 + x + a x^2\right) = o(x^2)$$

Per quali $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + a x^2)}{x^2} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + 2ax)}{2x} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2a}{2} = \frac{1}{2} - a$$

Def. Data $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ diremo che $f \in C^k((a,b))$ se esistono $f', f'', \dots, f^{(k)}$ di f in (a,b) e sono tutte continue

T.2 (Peano) Data $f \in C^n((a,b))$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Sia inoltre $P(x)$ un polinomio di grado $\leq n$. Allora è equivalente affermare che:

1) $\forall k = 0, \dots, n \quad f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0)$

2) $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots\dots + \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

3) $(f(x) - P(x)) = o((x-x_0)^n)$

Dim $(2) \Rightarrow (1)$

$$D^{(k)}(P(x))\Big|_{x=x_0} =$$

$$= D^{(k)}\left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)\Bigg|_{x=x_0} =$$

$$= D^{(k)}\left(\boxed{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}} \cdot \boxed{(x-x_0)^k}\right) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{\cancel{k!}} \cdot \cancel{k!} = f^{(k)}(x_0)$$

$(1) \Rightarrow (3)$ Dobbiamo mostrare che:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-P'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-P''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \overset{H}{=} \cdots \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-P^{(n-1)}(x)}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot(x-x_0)} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)-P^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{0}{n!} = 0$$

$\boxed{(3)\Rightarrow(2)}$ Dati $P_1(x)$ e $P_2(x)$ di grado $\leq n$ t.c.

$$\begin{cases} (f(x)-P_1(x)) = o((x-x_0)^n) & \text{per } x\to x_0 \\ (f(x)-P_2(x)) = o((x-x_0)^n) & \text{per } x\to x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1(x)-P_2(x) = o((x-x_0)^n)$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

$$P_2(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_n(x-x_0)^n$$

$$P_1(x)-P_2(x) = (a_0-b_0) + (a_1-b_1)(x-x_0) + (a_2-b_2)(x-x_0)^2 + \cdots + (a_n-b_n)(x-x_0)^n$$

Quindi l'unico modo per avere che $P_1(x) - P_2(x)$ sia $o((x-x_0)^n)$ è che $P_1 \equiv P_2$. Quindi l'unico polinomio che va bene è quello descritto in (2).

$\boxed{\text{Def.}}$ Data $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ di classe C^n e dato $x_0 \in (a,b)$ definiamo "Polinomio di Taylor di ordine n di f nel punto x_0" quell'unico polinomio di grado $\leq n$ che soddisfa (2) (oppure (1), oppure (3))