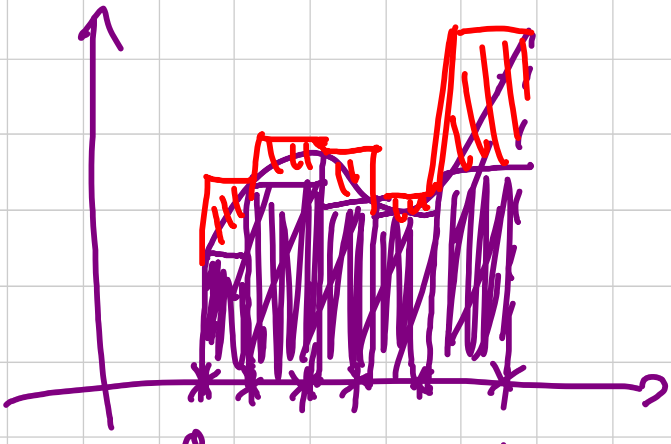
INTEGRALE DI RIEMANN



Def 1 Dato $[a,b]$ diremo che $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è una partizione di $[a,b]$ se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Def. 2 Dati $[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partizione di $[a,b]$,

definiamo

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i)} f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i$$

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i)} f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i$$

Def. 3 Dati $[a,b]$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata.

definiamo:

$$\int^{+}_{[a,b]} f(x)\,d(x) = \inf\left\{S(f,P) \mid P \text{ partizione di } [a,b]\right\}$$

$$\int^{-}_{[a,b]} f(x)\,dx = \sup\left\{s(f,P) \mid P \text{ partizione di } [a,b]\right\}$$

Quando $\int^{+}_{[a,b]} f(x)\,dx = \int^{-}_{[a,b]} f(x)\,dx$ diremo che $f \in \mathcal{R}[a,b]$

e il valore comune lo indico con $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$.

ES. 1 (funzione non $\mathcal{R}$-integrabile)

Prendo $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1]-\mathbb{Q} \end{cases}$$

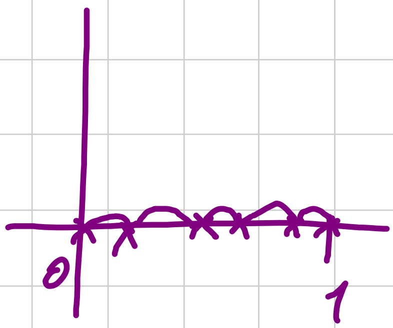
Allora $f \notin \mathcal{R}[0,1]$.

Infatti: $\forall P$ di $[0,1]$

sup = 1

$$\boxed{S(f,P)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = \boxed{1}$$

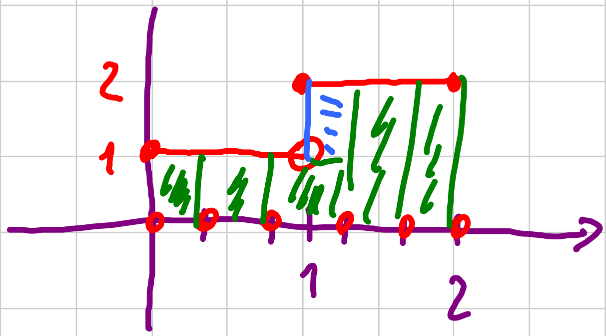


$$\int_{[0,1]}^{+} f(x)\,dx = 1$$

In modo analogo, sfruttando il fatto che in ogni $[x_{i-1}, x_i)$ l'inf di f è 0, ottengo che tutte $s(f, P)$ sono 0. Quindi $\boxed{\int_{[0,1]}^{-} f(x)\,dx = 0}$

OSS. **ES.** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

$f : [0,2] \to \mathbb{R}$ limitata



$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_5\}$ equispaziati

Def. 4 Dato $[a,b]$ e P_1 e P_2 partizioni di $[a,b]$ diremo che P_2 è più fine di P_1 se

$$P_1 \subset P_2 .$$

Lemma 1 Dati $[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata

P partizione di $[a,b]$ e $P' = P \cup \{\bar{x}\}$

$\| \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_k < \bar{x} < x_{k+1}$

Allora $\boxed{\begin{array}{l} s(f,P) \le s(f,P') \quad (1) \\ S(f,P) \ge S(f,P') \quad (2) \end{array}}$

Dim

$$s(f,P) = (x_1-x_0)m_1 + (x_2-x_1)m_2 + \dots + \boxed{(x_k-x_{k-1})\,m_k} + \dots + (x_n-x_{n-1})\,m_n$$

$$s(f,P') = (x_1-x_0)m_1 + (x_2-x_1)m_2 + \dots + \boxed{(\bar{x}-x_{k-1})m_k' + (x_k-\bar{x})m_k''} + \dots + (x_n-x_{n-1})\,m_n$$

Lemma 2 Dati $[a,b]$ ed f come prima e date P_1, P_2 part. di $[a,b]$ t.c. P_1 è più fine di P_2, allora

$$s(f,P_2) \le s(f,P_1)$$

$$S(f,P_2) \ge S(f,P_1)$$

Dim Segue in modo ovvio iterando il **Lemma 1**.

Lemma 3 Dati $[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ partizioni (qualsiasi) di $[a,b]$.

Allora $s(f,\mathcal{P}_1)\le S(f,\mathcal{P}_2)$

Dim Questo è ovvio se $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_2$.

Nel caso generale prendo $\mathcal{P}_3=\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$, allora ottengo

$$s(f,\mathcal{P}_1)\le s(f,\mathcal{P}_3)\le S(f,\mathcal{P}_3)\le S(f,\mathcal{P}_2).$$

Teorema Dati $[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata, allora

$$\int^{-}_{[a,b]} f(x)\,dx \le \int^{+}_{[a,b]} f(x)\,dx$$

Dim Segue dal lemma 3.

Criteri di Integrabilità

T.2 (Cond. nec. e suff. di integrabilità)

Dati $[a,b]$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata allora è equivalente affermare che:

(1) $f \in \mathcal{R}[a,b]$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{P}$ part. di $[a,b]$ t.c. $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$

$\boxed{\text{Dim}}$ (2) $\Rightarrow$ (1)

$\forall \varepsilon > 0$ prendo $\mathcal{P}$ t.c. $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$

$$s(f,\mathcal{P}) \le \int^{-}_{[a,b]} f(x)\,dx \le \int^{+}_{[a,b]} f(x)\,dx \le S(f,\mathcal{P})$$

$$0 \le \underbrace{\int^{+} - \int^{-}}_{=0} < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$

$\Downarrow$

(1)

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$\int^{-}_{[a,b]} f(x)\,dx = \int^{+}_{[a,b]} f(x)\,dx$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{P}_1$ part. di $[a,b]$ t.c. $S(f,\mathcal{P}_1) < \displaystyle\int^{+}_{[a,b]} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists P_2$ part. di $[a,b]$ t.c. $s(f,P_2) > \int\limits_{[a,b]}^{-} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$

Quindi

$$S(f,P_1) - s(f,P_2) < \varepsilon$$

Prendo ora $P_3 = P_1 \cup P_2$ quindi

$$s(f,P_2) \leq s(f,P_3) \leq S(f,P_3) \leq S(f,P_2)$$

1

quindi $\underline{S(f,P_3) - s(f,P_3) < \varepsilon}$

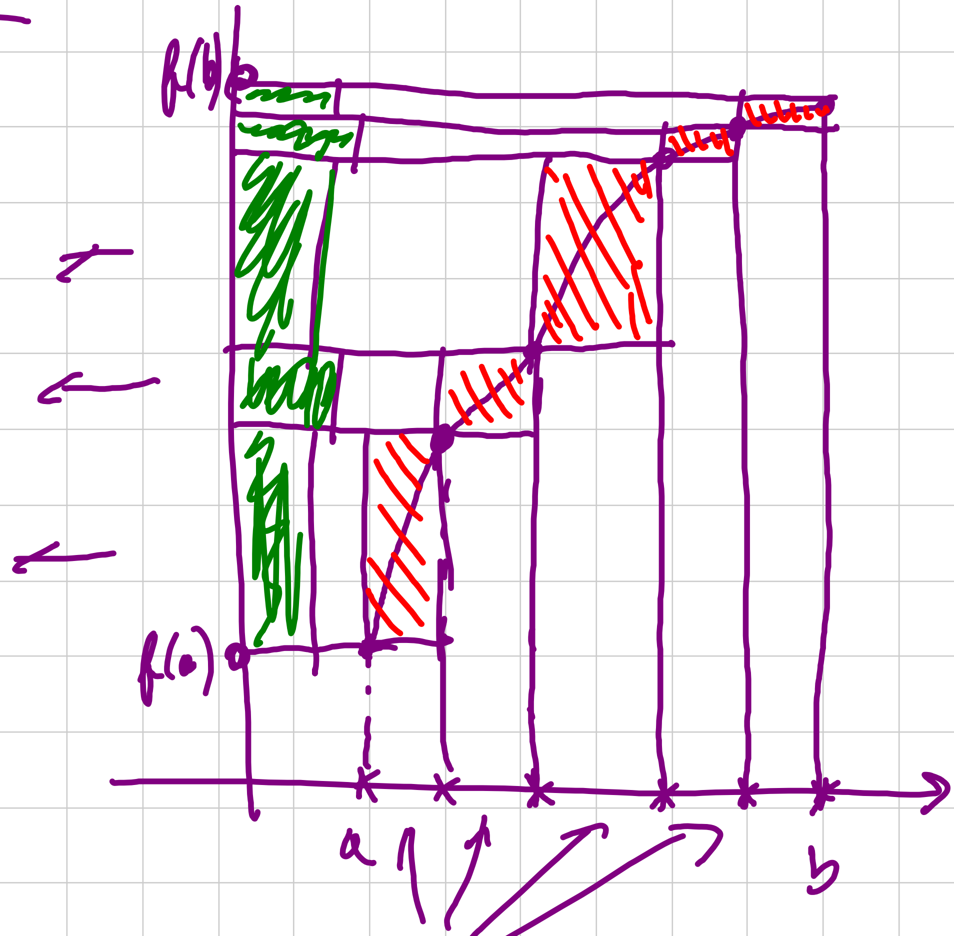
$\Downarrow$
(2)

$\boxed{T.3}$ (integrabilità di f. monotone)

Dati $[a,b]$ e $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ monotone

allora $f \in \mathcal{R}[a,b]$

Disegno



Se le prendo $\leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

$\boxed{\text{Dim}}$ (faccio caso crescente)

$\forall \varepsilon > 0$ prendo P t.c. ogni intervallino di P abbia ampiezza $< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

ottengo che:

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{f(b)-f(a)}} \cdot \left(\cancel{f(b)-f(a)} \right) = \varepsilon$$

Quindi f è $\mathcal{R}[a,b]$.