Università di Roma Tor Vergata - Facoltà di ingegneria

Corso di Analisi Matematica II per ingegneria Gestionale

Docente prima parte: **Emanuele Callegari** (Univ. di Roma *Tor Vergata*) - Sito di riferimento per il materiale: ????

1 Ottobre 2013

Lezione 2: SERIE NUMERICHE (II parte)

Proprietà elementari (ma importanti) delle serie:

1) Il carattere di $\sum a_n$ non cambia se si modificano un numero finito di termini

2) Le serie a termini positivi hanno la successione delle somme finite che è monotona crescente e quindi non possono essere indeterminate

$\boxed{\text{Dim}} \longrightarrow \left(S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \right)$

≥ 0

3) (condizione necessaria di convergenza)

Se $\sum a_n$ converge allora $a_n \to 0$.

$\boxed{\text{Dim}}$ $\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ $S_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$

$S_n \to \ell$

$S_{n+1} \to \ell$

$$\underset{\ell}{\underset{\downarrow}{S_{n+1}}} = \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{S_n}} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{a_{n+1}}} \qquad a_{n+1} = \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{S_{n+1}}} - \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{S_n}} \to 0$$

4) Dato $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ allora il carattere di $\sum a_n$ e $\sum \lambda a_n$ è lo stesso e in caso di convergenza, se $\sum a_n$ converge a l allora $\sum \lambda a_n$ converge λl

5) Date $\sum a_n$ e $\sum b_n$, se esse sono entrambe convergenti a l_1 e l_2 rispettivamente, allora $\underbrace{\sum (a_n + b_n)}$ converge a $l_1 + l_2$.

$\boxed{\text{Dim}}$ detta

$$S_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$$\sigma_n = (b_1 + b_2 + \dots + b_n),$$

$$S_n = ((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n))$$

$$S_n \to \ell_1 \qquad \sigma_n \to \ell_2$$

so questo

$$S'_n = S_n + \sigma_n \to \ell_1 + \ell_2$$

6) Quando so che $\sum a_n$ ha un certo carattere e devo studiare $\sum b_n$ e suppongo che $\sum (b_n - a_n)$ converge. Allora il carattere

Se $\sum b_n$ è la stessa di $\sum a_n$

Dim.

$\sum a_n \qquad \boxed{S_n}$

$\sum b_n \qquad \boxed{\sigma_n}$

$\sum (b_n - a_n) \qquad S'_n = \sigma_n - S_n$

$$\sigma_n \uparrow\uparrow\uparrow = \underset{\substack{\downarrow \\ l}}{S'_n} + S_n \uparrow\uparrow\uparrow$$

SERIE A TERMINI POSITIVI

Criterio del confronto

"definitivamente in n"

"$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$"

Date $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ serie a termini non negativi, tali che $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}$ $a_n \leq b_n$.

Allora, se $\sum b_n$ converge anche $\sum a_n$ converge.

Dim

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \leftarrow$$

$$\sigma_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n \leftarrow$$

$$S_n \leq \sigma_n$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\ell' \qquad \ell$$

$\sum u_n$ converge

$\boxed{\not h}$

Exemple $\sum \frac{1}{n^3}$ converge

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge

$\sum \frac{1}{n^3}$ converge

$\boxed{\text{Corollario}}$ Con stesse ipotesi di prima, se

$\sum a_n$ diverge allora $\sum b_n$ diverge

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}}$ $\alpha > 0$ $\boxed{1 < \alpha < 2}$!!?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}} \geq \boxed{\frac{1}{n}}$

$0 < \alpha \leq 1$ $\boxed{\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}}$ $\boxed{\text{se } \alpha \leq 1}$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $0 < \alpha \leq 1$

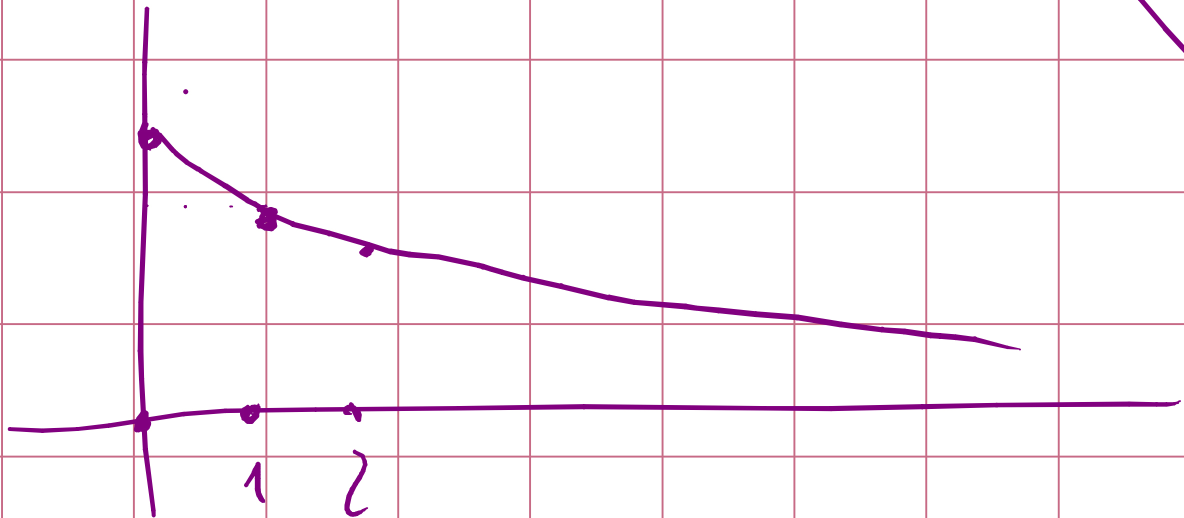
$\sum \frac{1}{n^2}$ converge

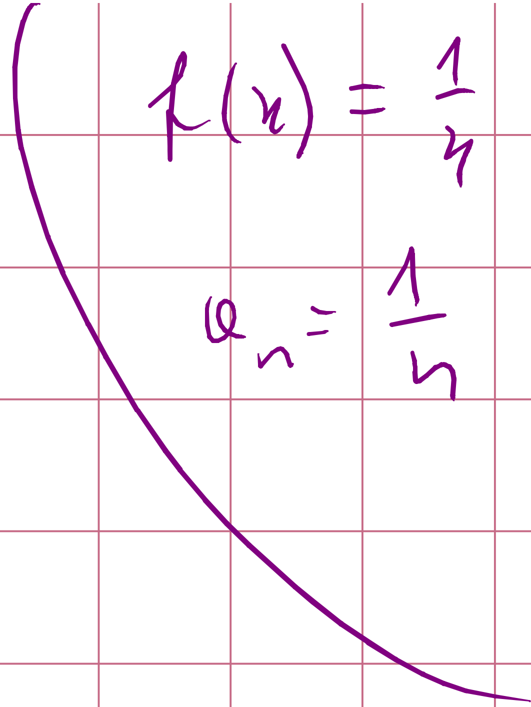
$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ se $\alpha \geq 2$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha \geq 2$

Criterio dell'integrale

Sia $f:[0,+\infty) \to (0,+\infty)$ decrescente



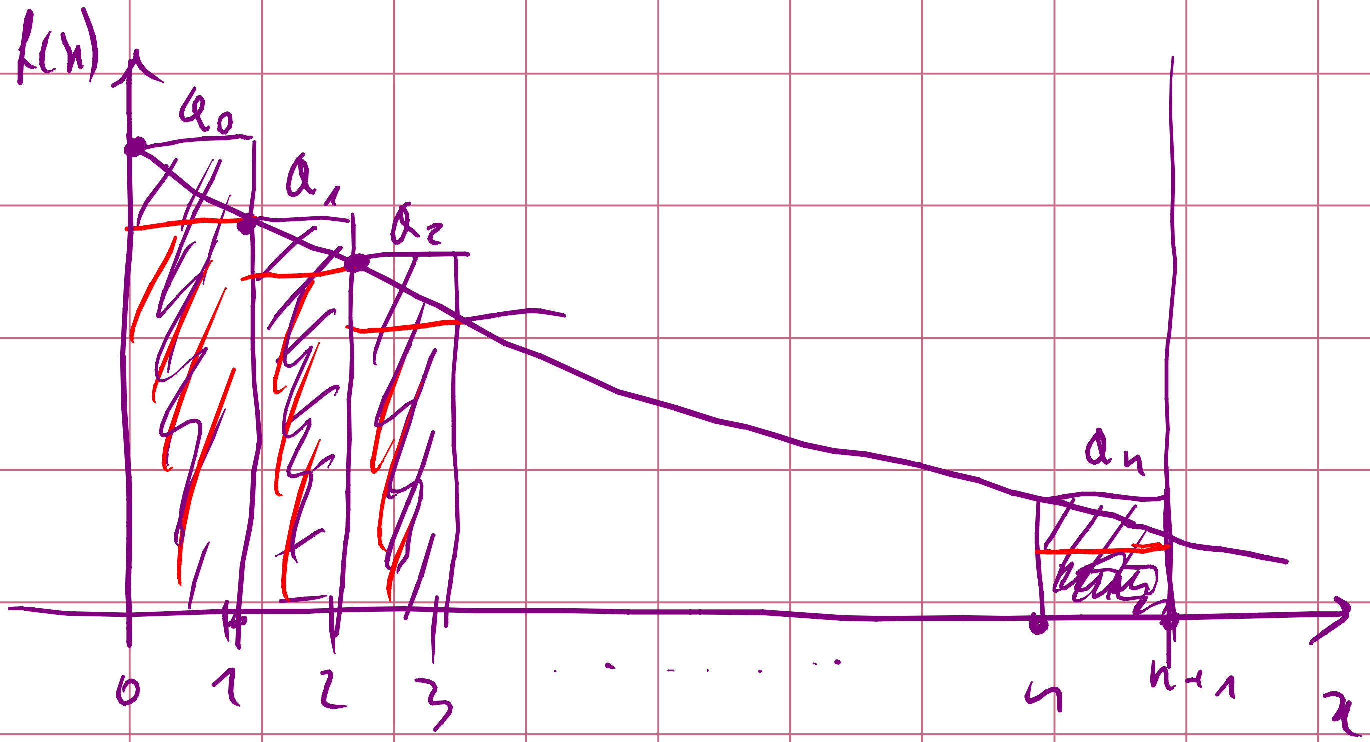


$f(x) = \frac{1}{x}$

$a_n = \frac{1}{n}$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n = f(n)$. Allora il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e di $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è lo stesso.

$\boxed{\text{Dimostr.}}$



$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} - a_0 = S_{n+1} - a_0$$

$$S_{n+1} - a_0 \leq \int_0^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n$$

$$\ell' \qquad \ell \quad L' \qquad L$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

per $\alpha \leq 1$ diverge

per $\alpha > 1$ converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$\alpha > 1 \to$ converge

$\alpha \leq 1 \to$ diverge

Criterio del confronto asintotico

Date le serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Se per $n \to +\infty$ $\boxed{a_n \simeq b_n}$ allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

Dimost.

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}}$$

definitivamente in n

$\sum a_n$ Converge

$\Downarrow \quad \Uparrow$

$\sum b_n$ Converge

$\frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} b_n$

$\boxed{\text{à partir d'un certain rang}}$

$\sum a_n$ Converge

$\sum \frac{1}{2} b_n$ Converge $\longrightarrow$ $\sum b_n$ Converge

---

$\boxed{\text{Exemples}}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\, dx$$

$\alpha > 1$ converge per ogni β

$\alpha < 1$ diverge per ogni β

$\boxed{\alpha = 1}$ $\rightarrow$ $\beta > 1$ converge

$\rightarrow$ $\beta \leq 1$ diverge

$\boxed{\text{Exemple 4}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \boxed{\frac{2+\cos n}{n^2+5}}$

$$0 < 1 \leq 2 + \cos n \leq 3$$

$$\frac{2+\cos n}{n^2+5} \leq \frac{3}{n^2+5} \leq \frac{3}{n^2}$$

$$\sum \frac{3}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

$\boxed{\text{Esempio}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to \frac{1}{e}}\right)^{n}$$

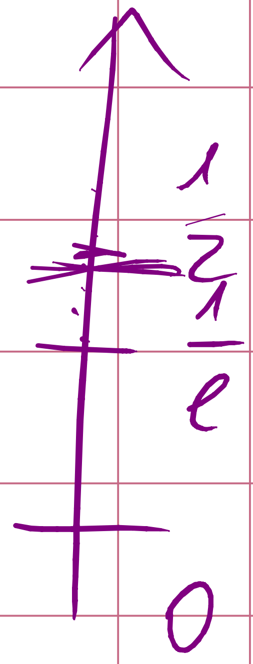
NO

$$\cancel{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

$$\cancel{1^n \to 1}$$

$$\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^{n} \longrightarrow e^{-1}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{1}{e}$$



def. da n

$$\boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge per confronto con $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ converge