Università di Roma Tor Vergata - Facoltà di ingegneria

Corso di Analisi Matematica II per ingegneria Gestionale

Docente prima parte: **Emanuele Callegari** (Univ. di Roma *Tor Vergata*) - Sito di riferimento per il materiale: www.problemisvolti.it

8 Ottobre 2013

Lezione 5: TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Def}}$ Dati $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ $\left(x = (x_1, \dots, x_n) \text{ e } \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \right)$

definiamo $d(x, \tilde{x}) = \| x - \tilde{x} \| =$

$$= \sqrt{(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (x_2 - \tilde{x}_2)^2 + \dots + (x_n - \tilde{x}_n)^2}$$

1) $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \quad d(x, \tilde{x}) \geq 0$ con l'uguaglianza che vale se e solo se $x = \tilde{x}$

2) $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \quad d(x, \tilde{x}) = d(\tilde{x}, x)$ (simmetria)

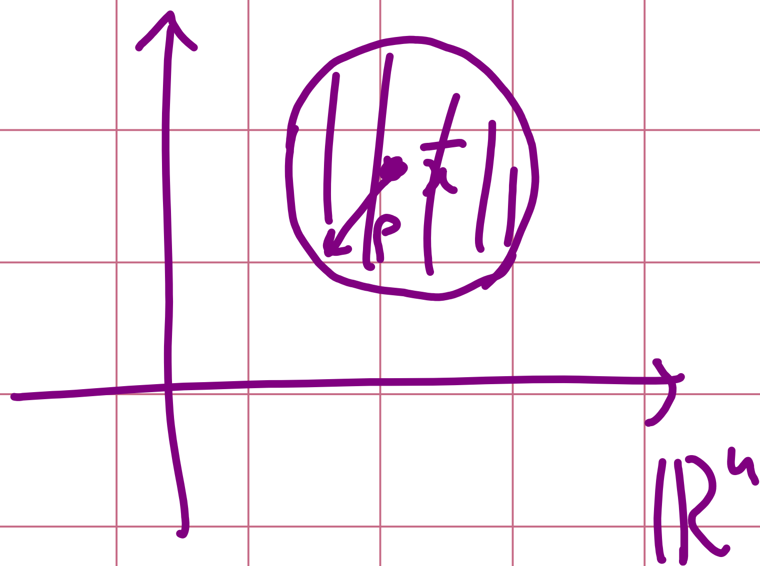
3) $\forall x, \tilde{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad d(x, \bar{x}) \leq d(x, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, \bar{x})$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

$$\underline{d(x, \bar{x})} = \|(x - \bar{x})\| = \|(x - \tilde{x}) + (\tilde{x} - \bar{x})\| \leq \underbrace{\|x - \tilde{x}\|}_{d(x, \tilde{x})} + \underbrace{\|\tilde{x} - \bar{x}\|}_{d(\tilde{x}, \bar{x})}$$

$\boxed{\text{Def.}}$ Dati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\rho > 0$ definiamo $I_{\bar{x}}(\rho) =$

$= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \bar{x}) < \rho \}$.



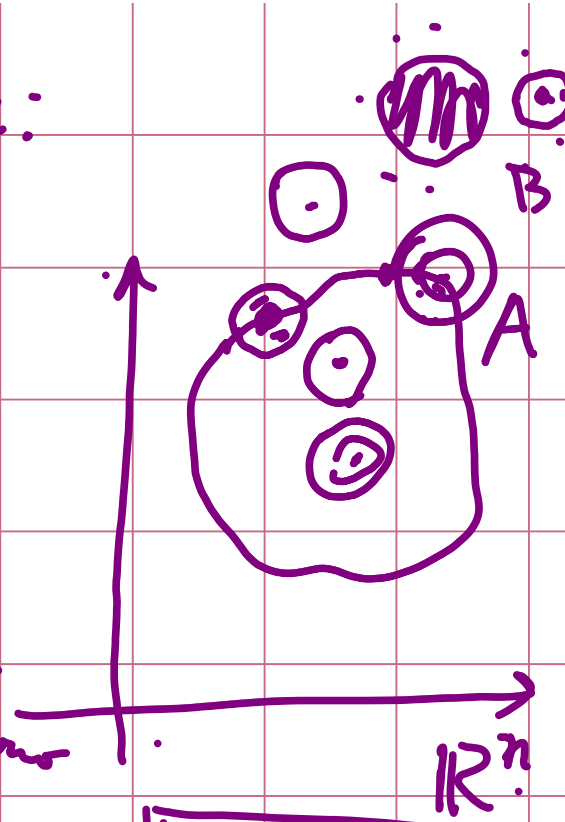
$\boxed{\text{Def.}}$ Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ diremo che:

1) $\bar{x}$ è interno ad A se $\exists \rho > 0$ t.c. $I_{\bar{x}}(\rho) \subset A$.

2) $\bar{x}$ è esterno ad A se $\bar{x}$ è interno ad A^c

3) $\bar{x}$ è di frontiera per A se non è né interno né esterno

4) $\bar{x}$ è di accumulazione per A se $\forall \rho > 0$ $I_\rho(\bar{x}) \cap (A - \{\bar{x}\}) \neq \emptyset$



$\boxed{\text{Oss.}}$ x è di frontiera per A se e solo se è di frontiera per A^c

5) $\bar{x}$ è un punto isolato di A se $\bar{x} \in A$ ma non è di accumulazione per A.

$\boxed{\text{Def.}}$ Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ definiamo

1) Parte interna di A $(\mathring{A})$ l'insieme di tutti i punti interni ad A

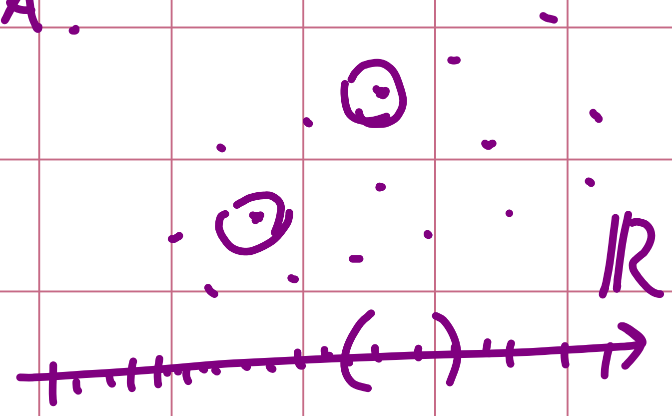
2) Frontiera di A (∂A) l'insieme di tutti i punti di frontiera di A

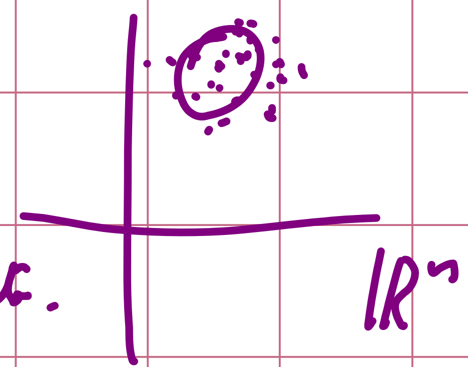
3) Chiusura di A $(\bar{A})$ è $\boxed{\mathring{A} \cup \partial A}$

4) Derivato di A (DA) è l'insieme di tutti i punti di accumulazione di A.

$\boxed{\text{Def}}$ Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ diremo che A è:

1) aperto se $A = \mathring{A}$
2) chiuso se A^c è aperto
3) denso se $\overline{A} = \mathbb{R}^n$
4) discreto se ogni suo punto è un punto isolato.





Esempio 1

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$$

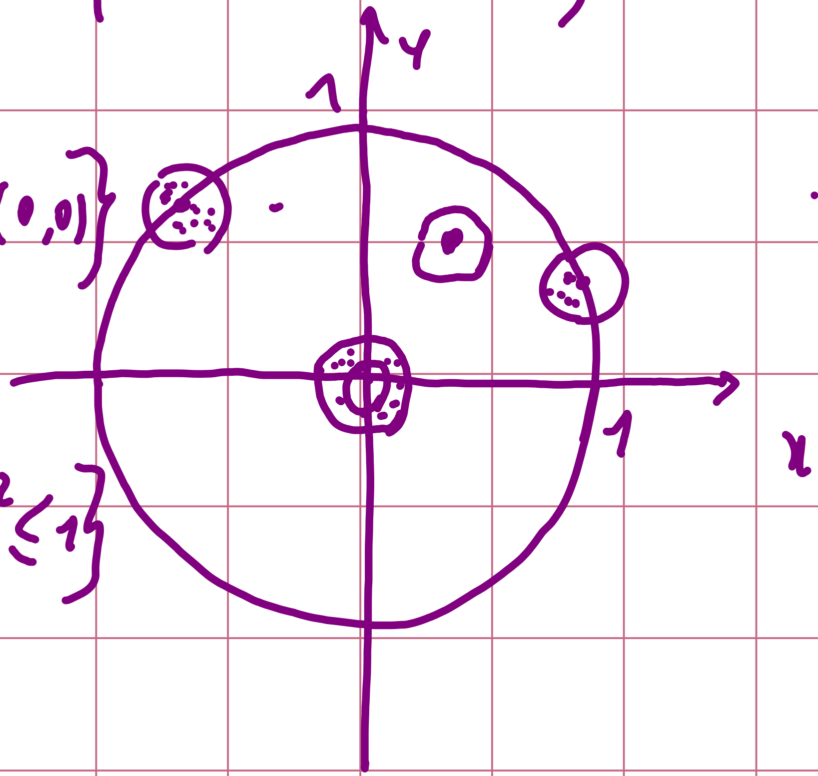
$$\mathring{A} = A$$

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$$

$$\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$DA = \overline{A}$$



A è aperto.

$\boxed{\text{Esempio 2}}$

$$A = \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}\}$$

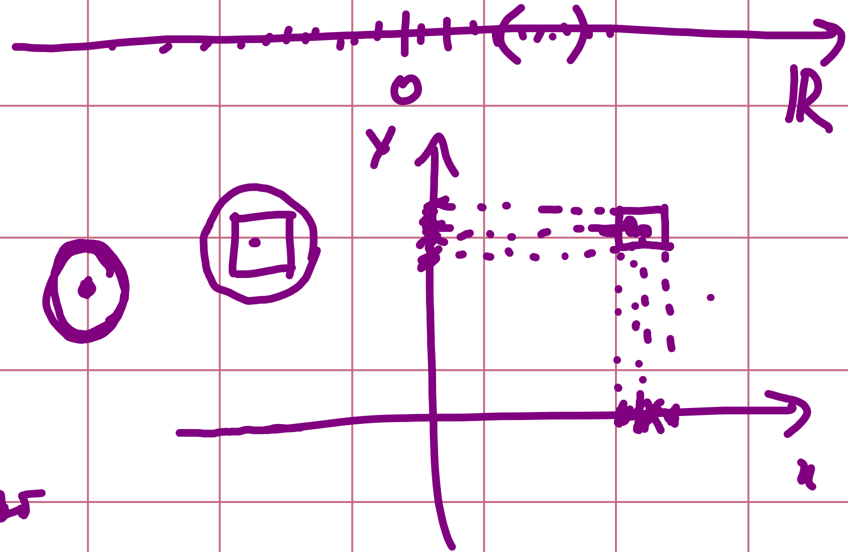
$$\partial A = \mathbb{R}^2 = \partial(A^c)$$

$$\mathring{A} = \emptyset$$

$$(A^c)^\circ = \emptyset$$

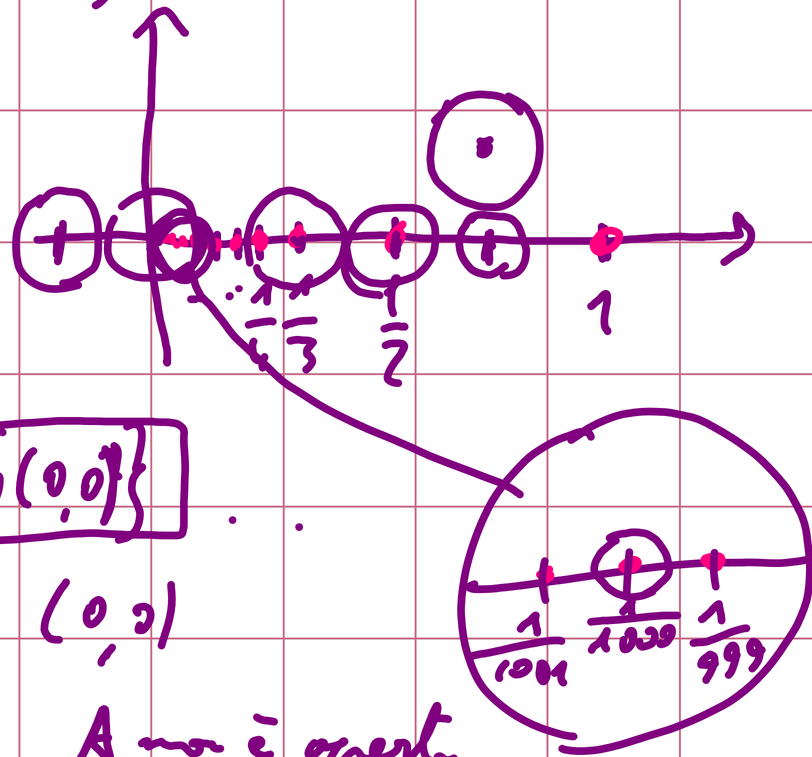
$$\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A = \mathbb{R}^2 \implies A \text{ è denso}$$

$$\overline{A^c} = (A^c)^\circ \cup \partial(A^c) = \emptyset \cup \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \implies A^c \text{ è denso}$$



Esempio 3

$$A = \left\{ \left(\tfrac{1}{n}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$



1) Tutti i punti fuori dell'asse x sono esterni
2) Sono esterni anche tutti i punti del semiasse negativo delle x.
3) Anche nel semiasse positivo sono esterni tutti i punti che non stanno in $\boxed{A \cup \{(0,0)\}}$ . .
4) Sono di frontiera tutti i punti di A e anche $(0,0)$

$\mathring{A} = \emptyset$ $\quad \partial A = A \cup \{(0,0)\} = \overline{A}$, A non è aperto

A^c non è aperto perché $(0,0) \in A^c$ ma non è interno ad A^c

A non è chiuso $\quad$ A è discreto $\quad DA = \{(0,0)\}$

Teorema (caratterizzazione degli insiemi chiusi)

Dato $C \subset \mathbb{R}^n$, è equivalente affermare che:

a) C è chiuso (cioè C^c è aperto)

b) $C \supset \partial C$

c) $C \supset DC$

$(b) \Updownarrow \boxed{\partial C \subset C} \Updownarrow$

$\boxed{\text{Dimostrazione}}$

(a) $\Leftrightarrow$ C^c è aperto $\Leftrightarrow$ $\partial(C^c)$ non interseca C^c $\Leftrightarrow$ $\partial(C^c) \subset C$

(b) $\Rightarrow$ (c) Se x è di acc. per C non può essere esterno a C $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x è o in $\mathring{C}$ o in ∂C $\Rightarrow$ $x \in C$

(c) $\Rightarrow$ (b) P.A. Supponiamo che $\exists x$ t.c. $x \in \partial C$ ma $x \notin C$

$\forall \rho > 0$ $I_x(\rho)$ interseca $C - \{x\}$

(c)

x è di acc. per C

$\Downarrow$

$x \in C$

$\boxed{\text{Def.}}$ Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ diremo che A è limitato se $\exists \rho > 0$ t.c.

$I_{(\bar{0})}(\rho) \supset A$.

$\boxed{\text{Teorema}}$ (B.W.)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato ma infinito.

Allora $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\bar{x}$ è di acc. per A.

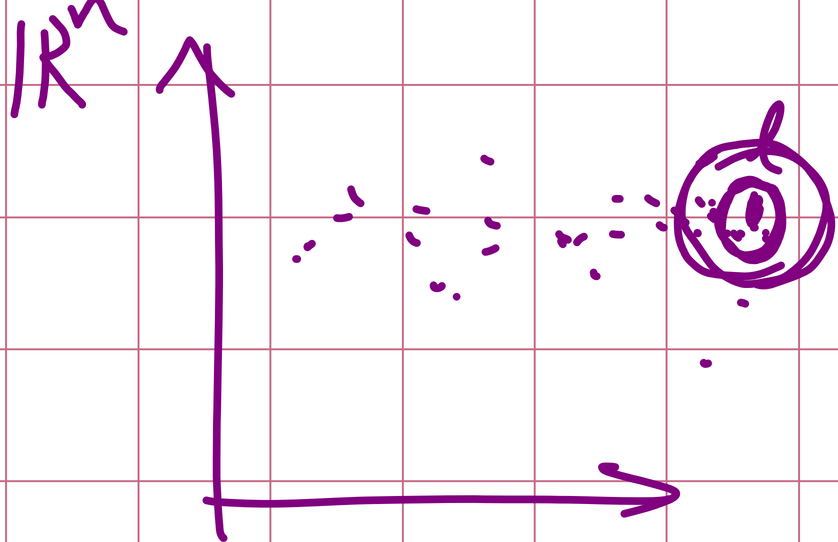
Def. Una successione in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^n$.

Def. Sia data una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ e sia $l \in \mathbb{R}^n$. Diremo che "$\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = l$" se

(1) $\boxed{\text{"}d(x_k, l) \to 0 \text{ per } k \to +\infty\text{"}}$.

(1') $\forall \varepsilon > 0$ $\boxed{\text{definitivamente in } k}$ si ha $x_k \in I_l(\varepsilon)$.

$\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k \geq k_0$



$\boxed{\text{Def}}$ Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}^n$ diremo che

"$\lim_{k\to+\infty} x_k = \infty$" se

(1) "$\lim_{k\to+\infty} d(x_k, \bar{0}) = +\infty$"

(1') $\forall \rho > 0$ definitivamente in k $x_k \notin I_{\bar{0}}(\rho)$ $(\ell_1, \dots, \ell_n)$

Teorema Sia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}^n$ e sia $\ell \in \mathbb{R}^n$

$x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$

Allora è equivalente affermare che

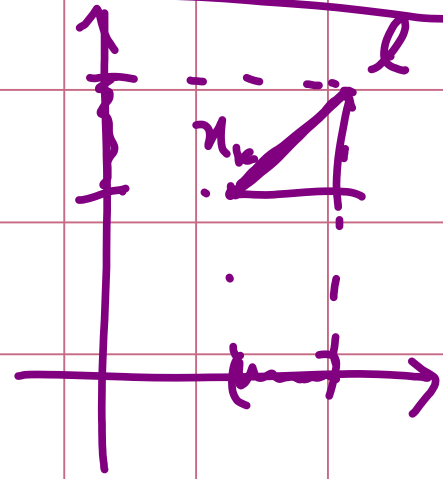
a) $\lim_{k \to +\infty} x_k = \ell$

b) $\forall i = 1, \dots, n$ $\lim_{k \to +\infty} x_{k,i} = \ell_i$

Dimostrazione (idea)

$$|x_{k,i} - \ell_i| \le d(x_k, \ell) \le \sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - \ell_i|$$

$\forall i = 1, \dots, n$



$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}^n$ che converge a $\ell \in \mathbb{R}^n$. Allora anche ogni ~~una~~ sottosuccessione converge a ℓ

∞

Teorema Una successione limitata ha sempre almeno una sottosuccessione convergente.

Def. Dato $K \subset \mathbb{R}^n$ diremo che K è compatto (per successioni) se comunque si prende $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione in K, da tale successione è sempre possibile estrarre una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$x_{n_k} \longrightarrow \overline{x} \in K.$$

Esempio 1

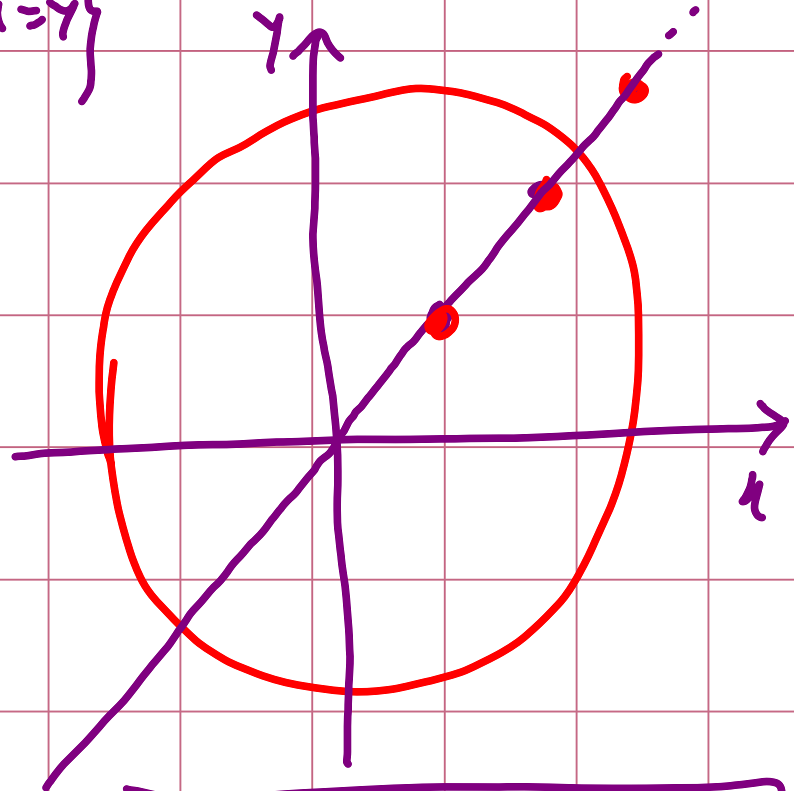
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

$$x_n = (n,n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = \infty}$$

$\forall \, (x_{n_k})$ si ha $x_{n_k} \to \infty$.

A non è compatto



Se A non è limitato allora A non è compatto

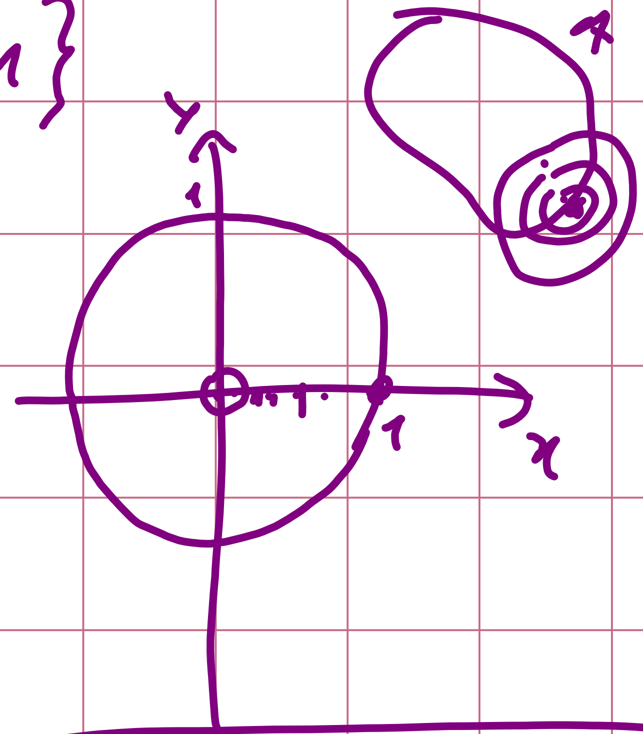
$\boxed{\text{Esempio 2}}$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \subset A$$

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = (0,0)$$

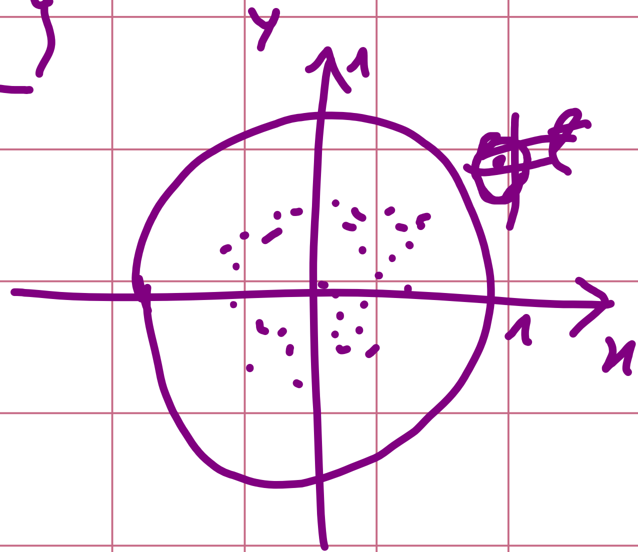
$$x_{n_k} \to (0,0)$$



Se A è compatto allora deve contenere tutti i suoi punti di accumulazione

$\boxed{\text{Esempio 3}}$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$



$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$x_{n_k} \longrightarrow \ell$

$\Uparrow \qquad\qquad \cap$

$\qquad\qquad\qquad A$

A è chiuso

Se A è chiuso e limitato allora A è compatto

$\boxed{\text{Oss.}}$ Se un insieme A è chiuso e (x_k) è una successione in A e converge a ℓ, allora anche $\ell \in A$.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Dato $K \subset \mathbb{R}^n$ è equivalente affermare che:

a) K è compatto

b) K è chiuso e limitato.