Università di Roma Tor Vergata - Facoltà di ingegneria

Corso di Analisi Matematica II per ingegneria Gestionale

Docente prima parte: **Emanuele Callegari** (Univ. di Roma *Tor Vergata*) - Sito di riferimento per il materiale: ***www.problemisvolti.it***

15 Ottobre 2013

Lezione 8: LIMITI IN $\mathbb{R}^n$ (III Parte)

Teorema (lim di funzioni composte)

Dati $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \Lambda$ e $g : \Lambda \to \mathbb{R}^k$,

$\bar{x}$ di acc. per Ω e $\bar{y}$ di acc. per Λ.

Supponiamo che $\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y}$ e $\lim\limits_{y \to \bar{y}} g(y) = \ell \in \mathbb{R}^k$.

Supponiamo inoltre che valga una delle due seguenti ipotesi:

1) g è continua in $\overline{y}$.

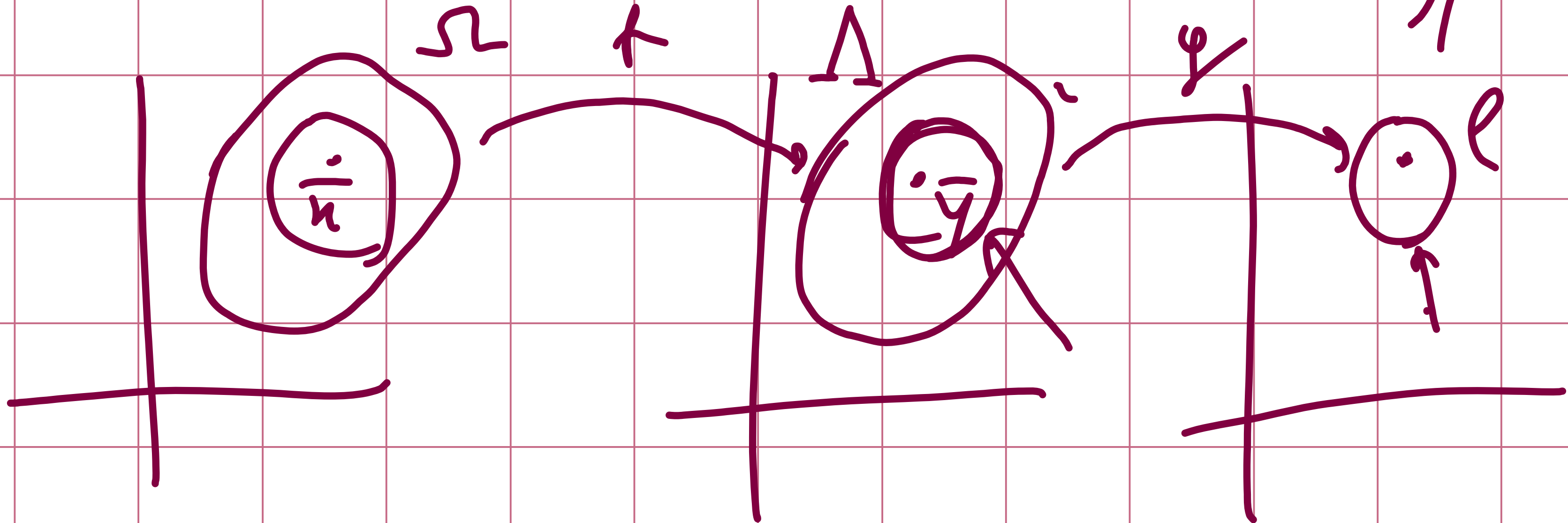
$\rightarrow$ 2) $\exists\ I$ intorno di $\overline{x}$ t.c. $\forall x \in I - \{\overline{x}\}$ si ha $f(x) \neq \overline{y}$

Allora

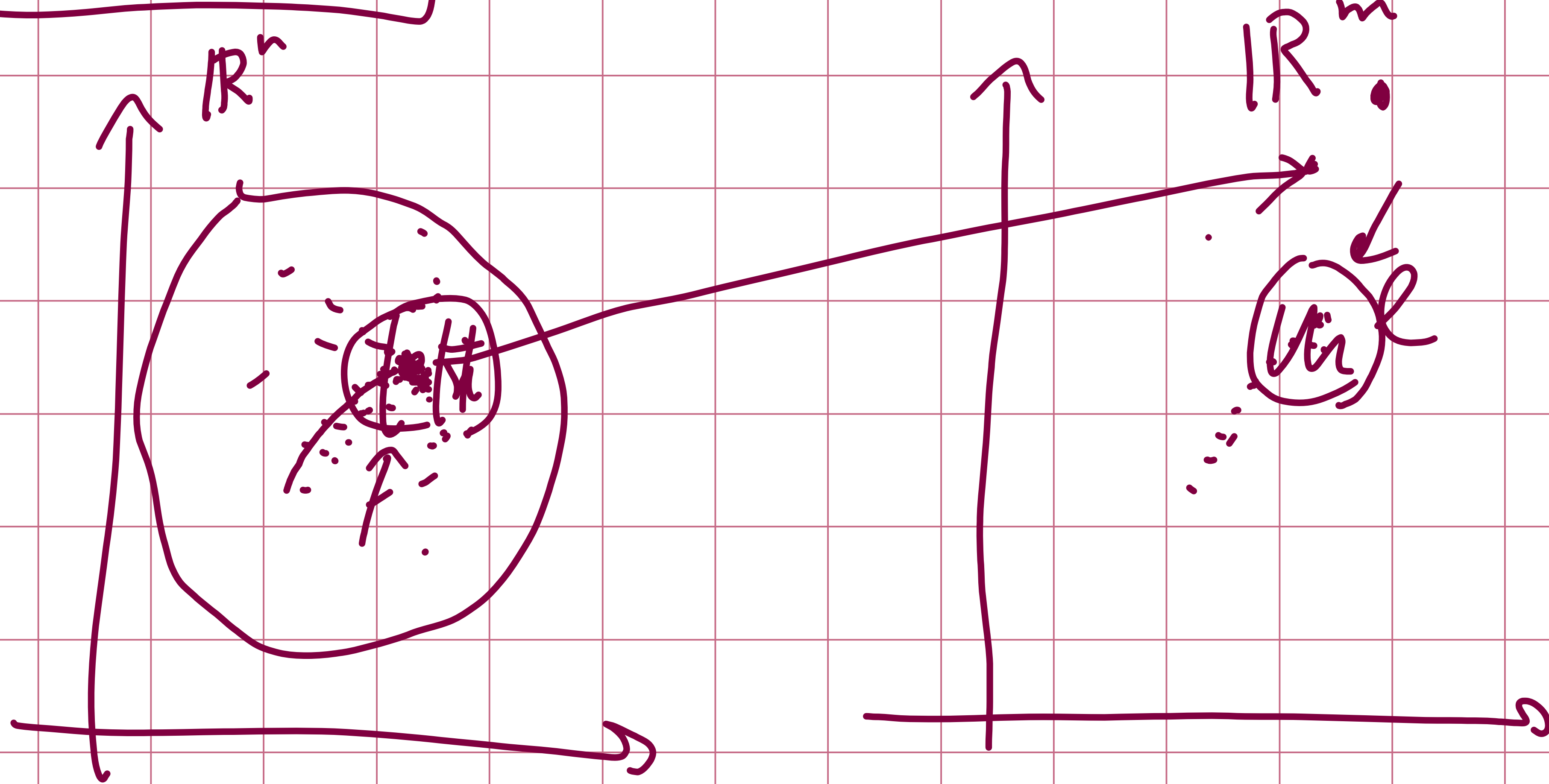
$$\lim_{x \to \overline{x}} g(f(x)) = \ell .$$

$\boxed{\text{Dim}}$ $\boxed{\text{Caso } 2}$ (simile a 1)

Voglio dimostrare che $\forall\, V$ intorno di $\ell \in \mathbb{R}^*$ $\exists\, W$ intorno di $\bar{x}$ in $\mathbb{R}^n$ t.c. $g(f(W \cap \Omega - \{\bar{x}\})) \subset V$



Teorema Ponte



Teorema (Ponte)

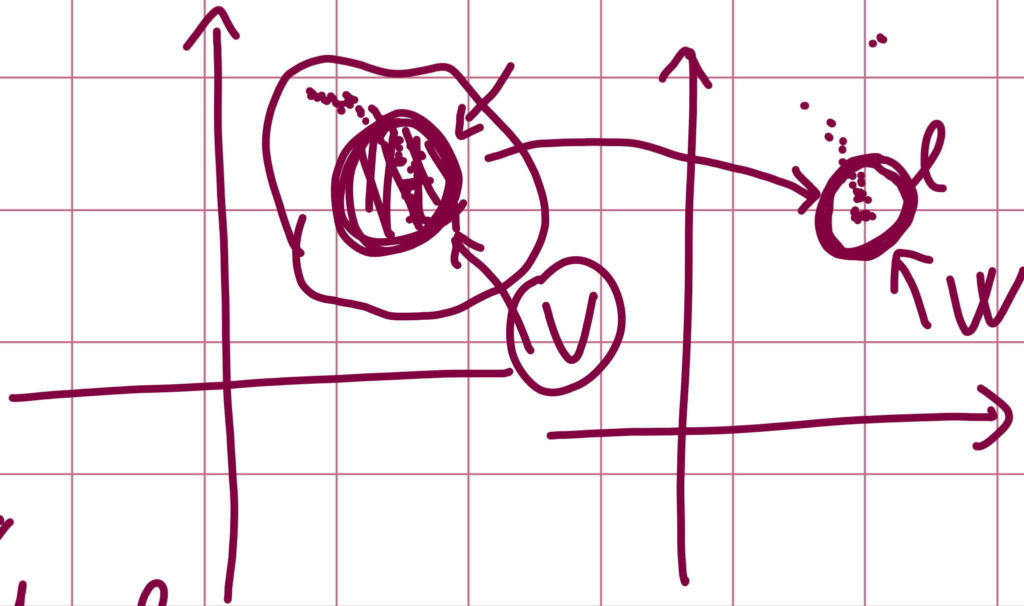
Dati $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}$ pt. di acc. per Ω, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ e $\ell \in \mathbb{R}^m$. È equivalente affermare che

(1) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$

(2) $\forall (x_n)$ a valori in $\Omega - \{\bar{x}\}$ che tende a $\bar{x}$ si ha che $(f(x_n))$ tende a ℓ

$\boxed{\text{Dim}}$

$(1) \Rightarrow (2)$

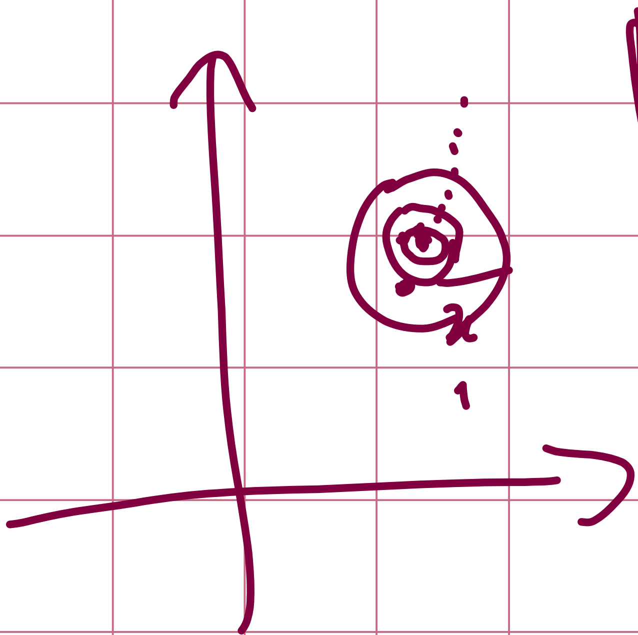


Voglio mostrare che comunque prendo $(x_n) \to \bar{x}$ "senza toccarlo", la sua immagine $(f(x_n))$ tende a ℓ.

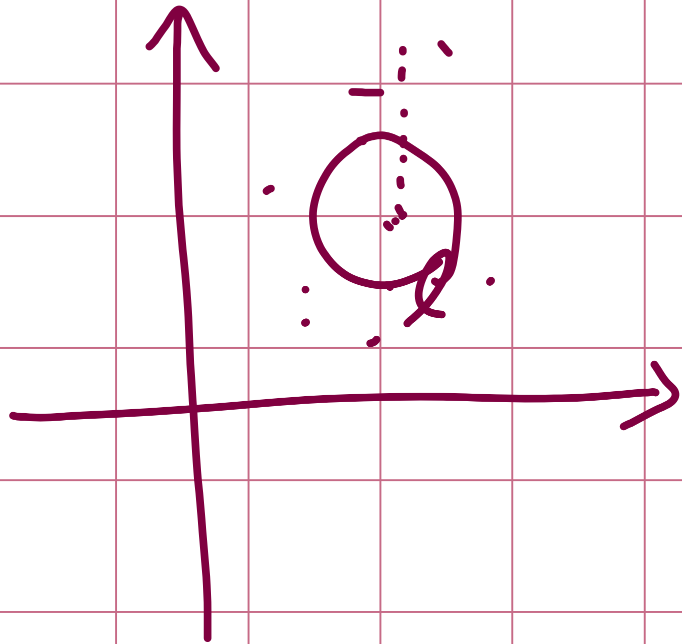
Cioè voglio mostrare che comunque prendo un intorno W di ℓ $(f(x_n))$ ci sta definit. dentro:

Infatti, comunque abbia preso W, posso prendere V intorno di $\bar{x}$ t.c. $f((V \cap \Omega) - \{\bar{x}\}) \subset W$.

Ciò permette di concludere perché def. in $x_n \in (V \cap \Omega) - \{\bar{x}\}$ e quindi $f(x_n)$ che def. della W.



P.A.



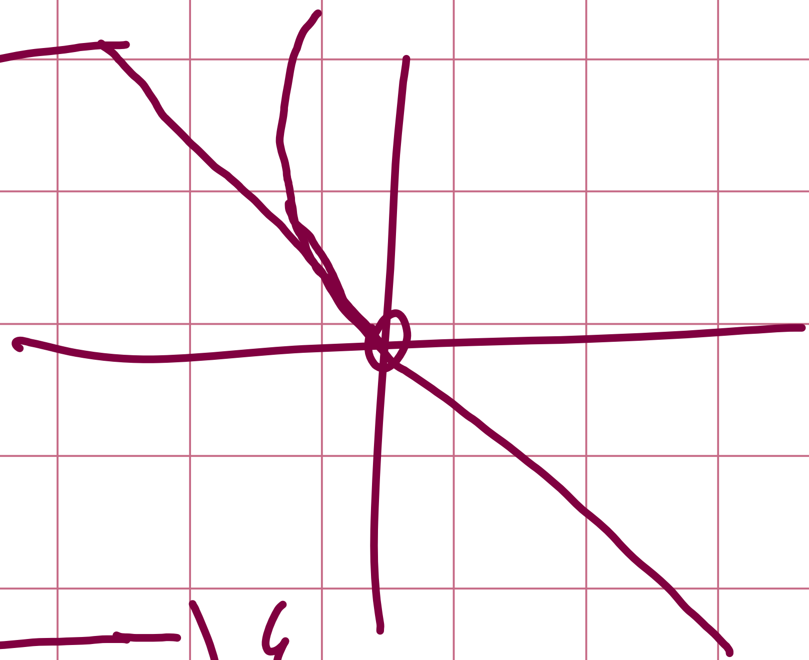
$\boxed{\text{P.B. 11 (lista)}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3+x^5+y^5}{\underbrace{x^4+y^4}+\underbrace{x^6y^3}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4 + x^5+y^5}{(x^4+y^4)\left(1+\frac{x^6y^3}{x^4+y^4}\right)}$$

$$\frac{x^6y^3}{x^4+y^4} = \boxed{\frac{x^4}{x^4+y^4}} \cdot \boxed{x^2y^3} \to 0$$

$$\frac{x^3 y^4}{x^5+y^5} \to 0 \qquad \text{NO}$$



$$y^5 = -x^5 + x^{1000}$$

$$y = \sqrt[5]{-x^5 + x^{1000}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\sqrt[5]{-x^5+x^{1000}}\right)^4}{x^5 - x^5 + x^{1000}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^7}{x^{1000}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^5}{(x^4+y^4)(1+o(1))}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{y^5}{(x^4+y^4)(1+o(1))}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x^3y^3}{(x^4+y^4)(1+o(1))}}_{\to 0}$$

$$\frac{x^5}{(x^4+y^4)(1+o(1))} = \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \frac{x^4}{(x^4+y^4)(1+o(1))}$$

$$\lim \frac{x^2y^2}{(x^4+y^4)(1+o(1))} \cdot \underbrace{xy}_{\to 0}$$

$\boxed{\text{Ex. 15 limi}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4+\boxed{x^3y^3}}{x^8+y^8+\boxed{x^9}-\boxed{y^9}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^8+y^8} = +\infty$$

$o(x^4+y^4)$

$$\frac{x^9}{x^8+y^8} = \underbrace{x}_{0} \underbrace{\boxed{\frac{x^8}{x^8+y^8}}}_{\text{lim.}}$$

$$\frac{x^3y^3}{x^4+y^4} = \underbrace{xy}_{0} \cdot \underbrace{\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}}_{\text{lim}} \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8+y^8}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\underbrace{\boxed{\frac{x^4}{x^4+y^4}}}_{\lim} \underbrace{x^4}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\boxed{\frac{y^4}{x^4+y^4}}}_{\lim} \underbrace{y^4}_{\downarrow\, 0} \right)$$

$$= 0$$

$$\boxed{\text{Exemplo } 17}$$

$$2xy$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2+xy}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \leq xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \leq \underline{x^2+y^2} + xy \leq \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)$$