

ESERCIZI SULLE SERIE CON TERMINI DI SEGNO QUALSIASI

Studiare convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin n}$$

$$3) \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \ln n}$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \sin n}$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 4n + 8}{n^3 + 2n^2 + 7n}$$

$$6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n}$$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n + e^{-n}}$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi n + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n \ln n + 1}$$

$$10) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$$

$$11) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right)$$

$$12) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n n}$$

$$13) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}\right)}{n^2 + (-1)^n}$$

$$14) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sin n}$$

$$15) \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2 + 2 \cdot (-1)^n}{n^2 + 1}\right)$$

$$16) \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n + 2 \cdot (-1)^n}{n + 1}\right)$$

$$17) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \log_8 n)}{n}$$

$$18) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \left[\text{utilizzare il risultato del quesito (19)} \right]$$

QUALCHE APPROFONDIMENTO SULLE SERIE

19) (Criterio di Abel) Sia data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$, dove le successioni (a_n) e (b_n) hanno le seguenti proprietà:

1) $a_n \rightarrow 0$ decrescendo

2) posto $S_n = \sum_{k=0}^n b_k$, la successione (S_n) è limitata

Mostrare che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ è convergente.

20) Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che, definitivamente in n , si abbia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Mostrare che se $\sum b_n$ converge allora anche $\sum a_n$ converge.

21) Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ tre serie con i termini di segno qualsiasi tali che, definitivamente in n , si abbia $a_n \leq b_n \leq c_n$.

Mostrare che se $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergono, allora anche $\sum b_n$ converge.

22) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione definita per ricorrenza

$$\text{da } \begin{cases} a_{n+1} = n a_n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Studiare il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.