Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 1

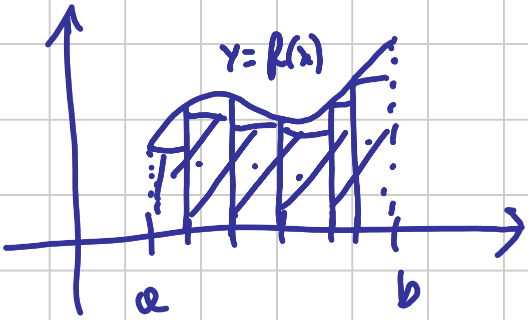
Titolo nota

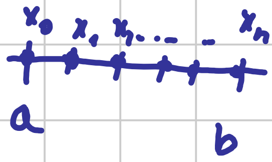
2 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

QUESTE PAGINE NON SONO GLI APPUNTI DEL CORSO, SONO SOLO QUELLO CHE SCRIVO SUL TABLET MENTRE SPIEGO. MANCA QUINDI TUTTO CIÒ CHE HO DETTO MA NON SCRITTO. A PARZIALE SOSTITUZIONE DI QUESTO HO TALVOLTA INSERITO DELLE NOTE A FORMA DI NUVOLETTA. SPERO CHE BASTI.

IL DOCENTE

INTEGRALE DI RIEMANN





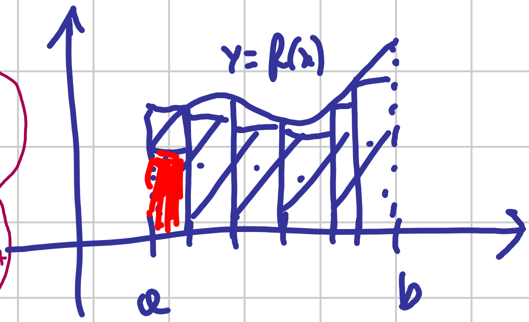
DEF. 1 DATO $[a,b]\subset\mathbb{R}$ DIREMO CHE $P=\{x_i\in\mathbb{R}\mid i=0,\dots,n\}$ È UNA PARTIZIONE DI $[a,b]$ SE $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$.

DEF. 2 DATI $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ LIMITATA E $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ PART. DI $[a,b]$, DEFINIAMO:

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot\inf_{[x_{i-1},x_i]}f(x)$$

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot\sup_{[x_{i-1},x_i]}f(x)$$

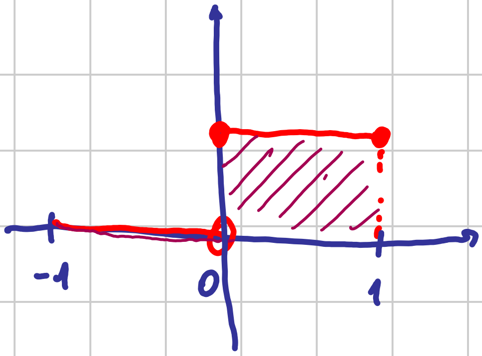
DATE 2 PARTIZIONI P_1 E P_2 DOBBIAMO DECIDERE COSA SIGNIFICA CHE P_1 È PIÙ FINE DI P_2. L'ESEMPIO QUI SOTTO CI CHIARISCE CHE NON VA BENE RICHIEDERE SOLO CHE I PUNTI SIANO PIÙ FITTI, SENNÒ NON SAREBBE PIÙ VERO CHE "RAFFINANDO LA PARTIZIONE" L'APPROSSIMAZIONE MIGLIORA.

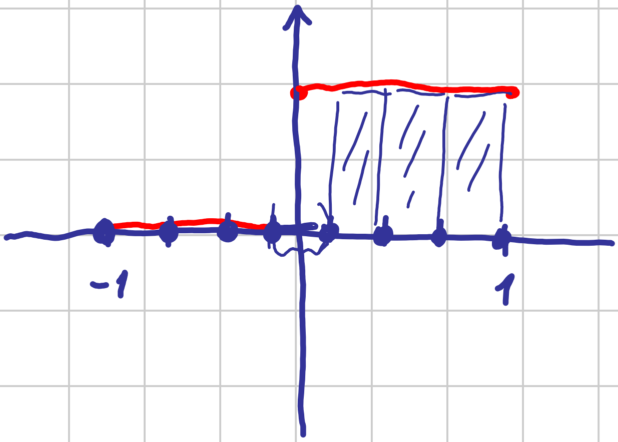


ES. CATTIVO $[-1,1]$ $\quad f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$ $\quad P_1=\{-1,0,1\}$

$P_2=\{-1,-\frac{5}{7},-\frac{3}{7},\dots\dots\frac{5}{7},1\}$

CALCOLARE $s(f,P_1)$ E $s(f,P_2)$





$$s(f,P_1) = (x_1 - x_0)\, m_1 + (x_2 - x_1)\cdot m_2 = 1\cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$s(f,P_2) = 0+0+0+0+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

$\boxed{\text{DEF 3}}$ DATI $[a,b]$, P_1, P_2 PART DI $[a,b]$, DIREMO CHE

$\underbrace{P_1 \text{ È PIÙ FINE DI } P_2}_{P_1 \succ P_2}$, SE, COME INSIEME, $P_2 \subset P_1$.

$\boxed{\text{LEMMA 1}}$ DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA E

SIANO $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n\}$

$P_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \bar{x}, x_k, \dots, x_n\}$

PARTIZIONI DI $[a,b]$, ALLORA:

PER COMODITÀ SPESSO SCRIVEREMO m_i AL POSTO DI $\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ E M_i AL POSTO DI $\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$

OVVIA

$$\underbrace{s(f,P_1) \le s(f,P_2)} \le S(f,P_2) \le S(f,P_1)$$

$\boxed{\text{DIM}}$ DIMOSTRIAMO ♪.

$$s(f,P_1) = (x_1-x_0)\, m_1 + (x_2-x_1)\, m_2 + \dots \boxed{+(x_k - x_{k-1})\, m_k} + \dots + (x_n - x_{n-1})\, m_n$$

UNICA DIFFERENZA

$$s(f,P_2) = \dots\dots \boxed{+(\bar{x}-x_{k-1})\cdot m_k' + (x_k - \bar{x})\, m_k''} \dots + (x_n - x_{n-1})\, m_n$$

VALGONO PERCHÈ PIÙ SI ALLARGA L'INSIEME PIÙ L'INF. SI ABBASSA

$$\left.\begin{array}{l} m_k' \ge m_k \\ m_k'' \ge m_k \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(\bar{x}-x_{k-1})\, m_k' + (x_k - \bar{x})\, m_k''} \ge$$

$$\ge (\bar{x}-x_{k-1})\, m_k + (x_k - \bar{x})\, m_k = \boxed{(x_k - x_{k-1})\, m_k}$$

QUINDI $s(f,P_1) \leq s(f,P_2)$

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA $S(f,P_2) \leq S(f,P_1)$

$\boxed{\text{LEMMA 2}}$ DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA, E P_1, P_2 PARTIZIONI DI $[a,b]$ CON $P_2 > P_1$, SI HA:

$$s(f,P_1) \leq s(f,P_2) \leq S(f,P_2) \leq S(f,P_1)$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ SI APPLICA RIPETUTAMENTE LEMMA 1.

$\boxed{\text{COROLLARIO 1}}$ DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA E P_1, P_2 PART. DI $[a,b]$ ALLORA:

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ PRENDO $P = P_1 \cup P_2$, AVRÒ $P > P_1$ E $P > P_2$, QUINDI

$$s(f,P_1) \underset{\text{LEMMA 2}}{\leq} s(f,P) \underset{\text{OVVIO}}{\leq} S(f,P) \underset{\text{LEMMA 2}}{\leq} S(f,P_2)$$

$\boxed{\text{DEF 4}}$ DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ E $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA, DEFINIAMO:

$$\int_{[a,b]}^{-} f = \sup \{ s(f,P) \mid P \text{ part. di } [a,b] \} < +\infty$$

$$\int_{[a,b]}^{+} f = \inf \{ S(f,P) \mid P \text{ part. di } [a,b] \} > -\infty$$

GRAZIE AL COROLLARIO 1

$$\left(\text{OSS. } \int^{-} \leq \int^{+} \right)$$

QUANDO $\int^{+} = \lambda = \int^{-}$ DICIAMO CHE $f \in \mathcal{R}([a,b])$ E IL VALORE λ SI INDICA CON $\int_a^b f(x)\,dx$.

f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN

$\boxed{\text{ES 1}}$ $f(x)=x$ È $\mathcal{R}$-integrabile su $[0,1]$ E $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

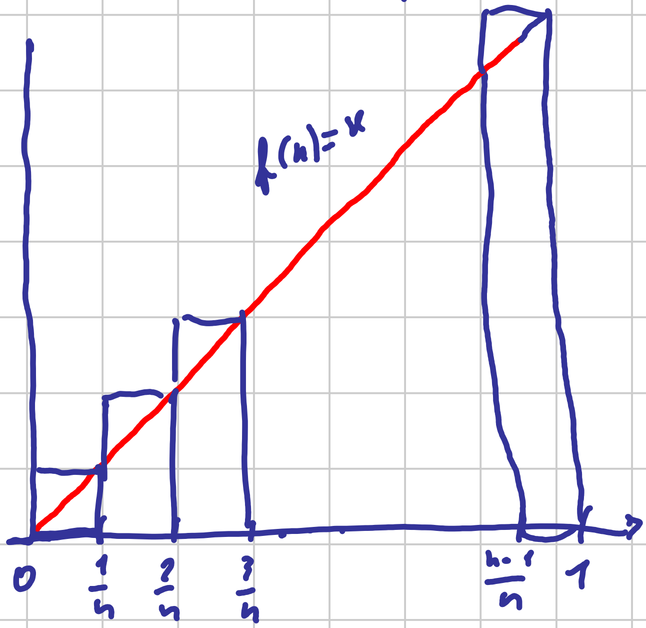
$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$

$P_1 = \{0, 1\}$

$P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$P_3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$

$\vdots$



$$\boxed{s(f,P_n)} = \cancel{\frac{1}{n}\cdot 0} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{3}{n} + \dots + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1+2+3+4+\dots+(n-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\frac{(n-1)\cdot n}{2} = \frac{n^2-n}{2n^2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}}$$

PASSANDO AL SUP PER $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ SI OTTIENE

$$\int^{-}_{[0,1]} x \geq \frac{1}{2}$$

OKKIO! PER IL MOMENTO HO SOLO "$\geq$" PERCHÉ NON SONO TUTTE LE PARTIZIONI MA SOLO QUELLE EQUISPAZIATE

$$\boxed{S(f,P_n)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{3}{n} + \dots + \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^2}(1+2+3+\dots+n) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}$$

ANALOGAMENTE PASSANDO ALL'INF PER $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ SI OTTIENE

$$\int^{+}_{[0,1]} x \leq \frac{1}{2}$$

$$\int^{-}_{[0,1]} x \geq \frac{1}{2} \qquad \int^{+}_{[0,1]} x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq \int^{-} x \leq \int^{+} x \leq \frac{1}{2} \implies \int^{-} = \int^{+} = \frac{1}{2}$$

PER CASA: $\int_0^1 x^2\,dx$ [RICORDARE LA FORMULA $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ SIA $f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ MOSTRARE CHE $f\notin \mathcal{R}([0,1])$

SU OGNI $[x_{i-1},x_i)$ $\sup f$ VALE 1, $\inf f$ VALE 0 $\Big\}$ PER DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ E $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

DA CIÒ SEGUE CHE

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot 0 = 0$$

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot 1 = 1$$

QUINDI $\underline{\int} f=0$ $\overline{\int} f=1$

QUINDI $f\notin\mathcal{R}([0,1])$