Analisi Matematica (II modulo)- Lez. 2

Titolo nota

4 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

(... CONTINUA) INTEGRALE DI RIEMANN

DEF. 1 DATI $A, B \subset \mathbb{R}$, CON $A \cap B \neq \emptyset$, ED $f: A \to \mathbb{R}$ LIMITATA, DEFINIAMO:

OSCILLAZIONE DI f SU B

$$\mathrm{osc}(f, B) = \sup\{f(x) \mid x \in A \cap B\} - \inf\{f(x) \mid x \in A \cap B\}$$

TEO. 1 DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ E $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

1) $f \in \mathcal{R}([a,b])$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{P}$ PART. DI $[a,b]$ T.C. $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$

3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{P}$ PART. DI $[a,b]$ T.C. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \, \mathrm{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$

DIMO

(2) ⇒ (1) $\forall \mathcal{P}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ SI HA:

$$s(f,\mathcal{P}) \le \int_{[a,b]}^{-} f \le \int_{[a,b]}^{+} f \le S(f,\mathcal{P}) \tag{1}$$

DA (2) SEGUE CHE $\forall \varepsilon > 0$ SI PUÒ SCEGLIERE $\mathcal{P}$ IN MODO CHE $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$, QUINDI, GRAZIE A (1), SI HA CHE

$$0 \le \int_{[a,b]}^{+} f - \int_{[a,b]}^{-} f < \varepsilon$$

VISTO CHE QUESTO VALE $\forall \varepsilon > 0$, SI PUÒ CONCLUDERE CHE:

$$\int_{[a,b]}^{+} f - \int_{[a,b]}^{-} f = 0$$

CIOÈ CHE $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

(1) ⇒ (2) DA (1) SEGUE CHE $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{-} f = \sup_{\mathcal{P}} s(f,\mathcal{P})$.

QUINDI $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{P}_1$ PART. DI $[a,b]$ T.C.

$$s(f,P_1) > \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

E ANALOGAMENTE $\exists P_2$ T.C.

$$S(f,P_2) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

NE SEGUE CHE:

SONO DIVERSE, DOBBIAMO MOSTRARE CHE SI PUÒ TROVARE P CHE SIA LA STESSA PER ENTRAMBE.

(2) $$S(f,P_2) - s(f,P_1) < \varepsilon$$

BASTA QUINDI PRENDERE $P = P_1 \cup P_2$ PER AVERE:

(3) $$s(f,P_1) \le s(f,P) \le S(f,P) \le S(f,P_2)$$

COSICHÈ DA (2) E (3) SEGUE

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

QUINDI VALE (2).

$\boxed{(2) \Leftarrow (3)}$ (2) E (3) SONO SOLO DUE MODI DIVERSI DI SCRIVERE LA STESSA COSA PERCHÈ, $\forall P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ SI HA:

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{[x_{i-1},x_i)} f(x) -$$

$$- \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1},x_i)} f(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{\left(\sup_{[x_{i-1},x_i)} f(x) - \inf_{[x_{i-1},x_i)} f(x) \right)}_{= osc\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right)}$$

$\boxed{\text{TEO 2}}$ DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ED $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ ALLORA:

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ E $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

2) $f + g \in \mathcal{R}([a,b])$ E $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

CON IL LINGUAGGIO DELL'ALGEBRA LINEARE QUESTO TEOREMA DICE CHE $\mathcal{R}([a,b])$ È UNO SPAZIO VETTORIALE E CHE L'APPLICAZIONE

$$\mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

È LINEARE

$\boxed{\text{DIMO}}$ (1) **I° CASO: $\alpha > 0$.**

PER OGNI P PART. DI $[a,b]$ SI HA:

ATTENZIONE: SE NON FOSSE $\alpha>0$ IL PASSAGGIO NON SAREBBE VALIDO, PERCHÉ L'INF. DIVENTEREBBE SUP.

$$s(\alpha f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \alpha f(x) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = \alpha s(f, P).$$

CIOÈ:

$$s(\alpha f, P) = \alpha \cdot s(f, P)$$

QUINDI:

SERVE $\alpha>0$

PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([a,b])$

$$\int_{[a,b]}^{-} \alpha f = \sup_{P} s(\alpha f, P) = \sup_{P} \alpha \cdot s(f,P) = \alpha \cdot \sup_{P} s(f,P) = \alpha \int_{[a,b]}^{-} f = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI OTTIENE:

$$\int_{[a,b]}^{+} \alpha f = \dots\dots = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

QUINDI:

$$\int_{[a,b]}^{-} \alpha f = \alpha \int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{+} \alpha f$$

PERCIÒ $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ E $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$.

II° CASO: $\alpha = -1$

PER OGNI PARTIZIONE P SI HA:

ATTENZIONE AL FATTO CHE PORTANDO FUORI IL SEGNO L'INF DIVENTA SUP

$$s(-f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} (-f(x)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot (-1) \cdot \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = -S(f, P)$$

CIOÈ:

$$s(-f, P) = -S(f, P)$$

QUINDI:

$$\underline{\int}_{[a,b]} -f = \sup_{P} s(-f,P) = \sup_{P} -S(f,P) \overset{\text{ATTENZIONE CHE SUP DIVENTA INF}}{=} -\inf_{P} S(f,P) = -\overline{\int}_{[a,b]} f \overset{\text{PERCHÉ } f\in\mathcal{R}([a,b])}{=} -\int_a^b f(x)\,dx$$

ANALOGAMENTE SI OTTIENE ANCHE:

$$\overline{\int}_{[a,b]} -f = \dots = -\int_a^b f(x)\,dx$$

QUINDI $-f \in \mathcal{R}([a,b])$ E $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>IL CASO GENERALE</u> $(\alpha \in \mathbb{R})$ SI OTTIENE COMBINANDO I 2 CASI $\alpha > 0$ E $\alpha = -1$.

(2) PER OGNI $P = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ SI HA:

(4)
$$s(f+g,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1},x_i]} \left(f(x)+g(x)\right) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left(\inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) + \inf_{[x_{i-1},x_i]} g(x) \right) =$$

$$= s(f,P) + s(g,P)$$

PER CONVINCERSI CHE: $\inf_I \left(f(x)+g(x)\right) \geq \inf_I f(x) + \inf_I g(x)$

SI OSSERVI BANALMENTE CHE

SE $\lambda = \inf_I f(x)$ E $\mu = \inf_I g(x)$

ALLORA, $\forall x \in I$ $f(x) \geq \lambda$ E $g(x) \geq \mu$.

QUINDI $\forall x \in I$ $f(x)+g(x) \geq \lambda + \mu$,

CIOÈ $\lambda + \mu$ È MINORANTE

DELL'INSIEME $\{f(x)+g(x) \mid x \in I\}$

QUINDI: $\inf_I \left(f(x)+g(x)\right) \geq \lambda + \mu = \inf_I f(x) + \inf_I g(x)$

QUINDI SE PER OGNI $\varepsilon > 0$ PRENDO P_1 E P_2 IN MODO CHE:

$$s(f,P_1) > \underline{\int} f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{E} \quad s(g,P_2) > \underline{\int} g - \frac{\varepsilon}{2}$$

ALLORA, PRESA $P = P_1 \cup P_2$, SI HA, A MAGGIOR RAGIONE:

(5)
$$s(f,P) > \underline{\int} f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{E} \quad s(g,P) > \underline{\int} g - \frac{\varepsilon}{2}$$

COMBINANDO (4) E (5), POSSIAMO CONCLUDERE CHE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P$ PART. DI $[a,b]$ T.C.

$$s(f+g,P) \geq s(f,P) + s(g,P) \geq \underline{\int} f + \underline{\int} g - \varepsilon$$

DA CUI SEGUE CHE: $\forall \varepsilon > 0$

$$\underline{\int} f+g \geq \underline{\int} f + \underline{\int} g - \varepsilon$$

PERCHÉ $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$

CIOÈ CHE:

(6) $$\underline{\int} f+g \geq \underline{\int} f + \underline{\int} g = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

PROCEDENDO IN MODO ANALOGO SI OTTIENE ANCHE:

(7) $$\overline{\int} f+g \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

COMBINANDO INSIEME (6) E (7) SI OTTIENE:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq \underline{\int} f+g \leq \overline{\int} f+g \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

QUINDI $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$ E $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

TEO 3 DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ED $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ ALLORA SI HA:

1) f^+, f^- ED $|f|$ STANNO IN $\mathcal{R}([a,b])$
2) $\max\{f,g\}$ E $\min\{f,g\}$ STANNO IN $\mathcal{R}([a,b])$
3) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
4) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
5) $\forall c \in (a,b)$ f È $\mathcal{R}$-INTEGRABILE SIA SU $[a,c]$ CHE SU $[c,b]$ E $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

SI RICORDI CHE
$f^+ = \max\{f, 0\}$
$f^- = -\min\{f, 0\}$
QUINDI
$f = f^+ - f^-$
E
$|f| = f^+ + f^-$

DIMO

(1) POICHÉ $f \in \mathcal{R}([a,b])$ SAPPIAMO CHE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PART. DI $[a,b]$ T.C.

(8) $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

OSSERVIAMO CHE VALE SEMPRE:

$$\operatorname{osc}(f^+, [x_{i-1}, x_i]) \leq \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i])$$

3 CASI:
SU $[x_{i-1}, x_i)$ f PUÒ
1 CAMBIAR SEGNO
2 ESSERE SEMPRE ≥ 0
3 ESSERE SEMPRE ≤ 0

CASO 1: $\sup f = \sup f^+$ E $\inf f < 0 = \inf f^+$
DA CUI SEGUE $\operatorname{osc}(f) > \operatorname{osc}(f^+)$
CASO 2: OVVIO PERCHÉ $f = f^+$
CASO 3: OVVIO PERCHÉ $f^+ \equiv 0$.

QUINDI, QUANDO VALE (8), A MAGGIOR RAGIONE VALE ANCHE:

(9) $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot osc\left(f^+, [x_{i-1}, x_i]\right) < \varepsilon$$

MA DIRE CHE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{P}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ T.C. VALE (9), SIGNIFICA PROPRIO CHE $f^+ \in \mathcal{R}([a,b])$.

PER QUANTO RIGUARDA f^-, BASTA OSSERVARE CHE $f^- = f^+ - f$ E QUINDI $f^- \in \mathcal{R}([a,b])$ PERCHÈ $f, f^+ \in \mathcal{R}([a,b])$.

LO STESSO DICASI PER $|f| = f^+ + f^-$.

(2) BASTA NOTARE CHE:

$$MAX\{f, g\} = f + (g - f)^+$$

E CHE:

$$MIN\{f, g\} = -MAX\{-f, -g\}$$

E APPLICARE (1) E IL TEO. 2.

(3) SE $f \leq g$ ALLORA $\forall \mathcal{P}$ PART. DI $[a,b]$ SI HA $s(f, \mathcal{P}) \leq \nu(g, \mathcal{P})$ E, DI CONSEGUENZA, $\int^{-} f \leq \int^{+} g$. MA POICHÈ $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, CIÒ SIGNIFICA CHE $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

(4) VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$f = f^+ - f^- \leq f^+ + f^- = |f|$$

QUINDI DA (3) SEGUE:

(10) $$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

ANALOGAMENTE DALLA DISUGUAGLIANZA:

$$-f = -f^+ + f^- \leq f^+ + f^- = |f|$$

SEGUE:

(11) $$-\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b -f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

METTENDO INSIEME (10) E (11) SI OTTIENE:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(5) QUESTO PUNTO È PIÙ LUNGO DA SCRIVERE (MA NON PIÙ DIFFICILE).

L'IDEA DA USARE È CHE SE $\mathcal{P}$ È UNA PARTIZIONE DI $[a,b]$, CONTENENTE ANCHE IL PUNTO c, ALLORA ESISTONO $\mathcal{P}_1$ PARTIZIONE DI $[a,c]$ E $\mathcal{P}_2$ PARTIZIONE DI $[c,b]$ TALI CHE $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, DA CUI SI OTTIENE

$$s(f,\mathcal{P}) = s(f,\mathcal{P}_1) + s(f,\mathcal{P}_2) \quad \text{E} \quad S(f,\mathcal{P}) = S(f,\mathcal{P}_1) + S(f,\mathcal{P}_2)$$

USANDO TALI IDENTITÀ SI RIESCE A DEDURRE SIA CHE $f \in \mathcal{R}([a,c])$ E $f \in \mathcal{R}([c,b])$ SIA CHE:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

I DETTAGLI VENGONO LASCIATI ALLO STUDENTE.

DEF 2 DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ED $f \in \mathcal{R}([a,b])$, DEFINIAMO

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

TEO. 4 DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ E $f \in \mathcal{R}([a,b])$ E DATI $c_1, c_2, c_3 \in [a,b]$ E DISTINTI.

ALLORA, COMUNQUE SIANO ORDINATI c_1, c_2 E c_3, SI HA

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx$$

DIMO

IL CASO $c_1 < c_2 < c_3$ SEGUE DAL PUNTO (5) DEL **TEO. 3**.

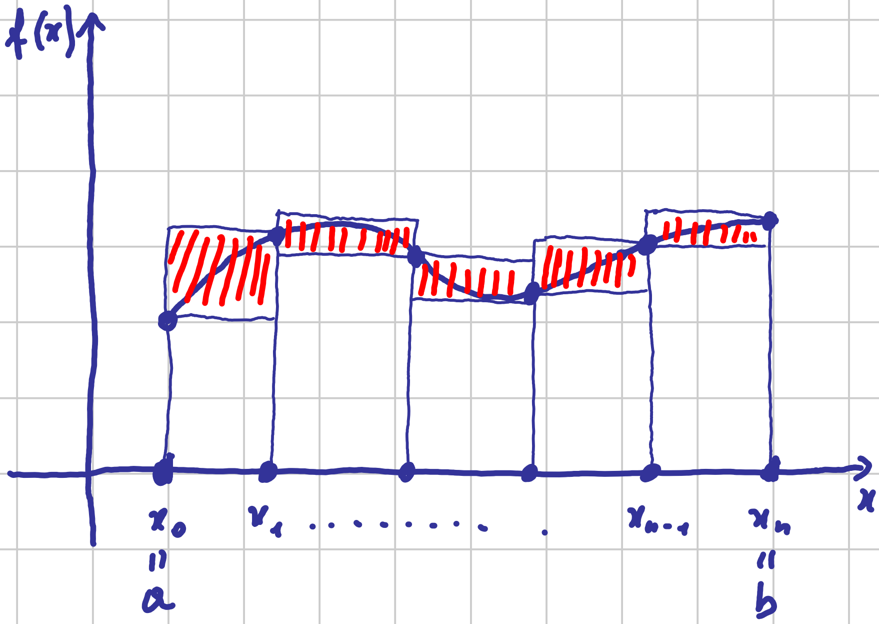
GLI ALTRI CASI SI GESTISCONO CON LA **DEF 2**.

$\boxed{\text{TEO. 5}}$ DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ED $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA, ALLORA $f \in \mathcal{R}([a,b])$

$\boxed{\text{DIMO}}$ VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ T.C.

(12) $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \, osc(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

IL VALORE DI (12) È L'AREA DELLA ZONA ROSSA IN FIGURA:



L'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE È DI SCEGLIERE UNA PARTIZIONE $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ IN MODO CHE LE "ALTEZZE DEI RETTANGOLINI ROSSI" SIANO TUTTE MINORI DI $\frac{\varepsilon}{b-a}$. IN TAL MODO, VISTO CHE LA SOMMA DELLE BASI È $b-a$, SI AVRÀ CHE LA SOMMA DELLE AREE È MINORE DI ε.

FORMALIZZIAMO L'IDEA.

DAL FATTO CHE f È CONTINUA E CHE $[a,b]$ È COMPATTO, GRAZIE AL TEO. DI HEINE-CANTOR, SEGUE CHE f È UNIFORMEMENTE CONTINUA. DI CONSEGUENZA:

(13) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ T.C. SE $x', x'' \in [a,b]$ E $|x'-x''| < \delta$ ALLORA $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

QUINDI, PRESA $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ TALE CHE $x_i - x_{i-1} < \delta$ PER OGNI $i = 1, \dots, n$, DA (13) SEGUE CHE, PER OGNI $i = 1, \dots, n$, SI HA:

$$\operatorname{osc}(f,[x_{i-1},x_i]) = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) =$$

PASSANDO AL SUP. LA DISUGUAGLIANZA È PASSATA DA STRETTA A DEBOLE

$$= \sup\{f(x')-f(x'') \mid x',x''\in[x_{i-1},x_i]\} \leq \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}$$

QUINDI PER TALE $\mathcal{P}$ SI HA:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\operatorname{osc}(f,[x_{i-1},x_i]) \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

QUINDI (12) È VERO. QUINDI $f\in\mathcal{R}([a,b])$.

TEO.6 DATI $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ED $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ MONOTONA, ALLORA $f\in\mathcal{R}([a,b])$

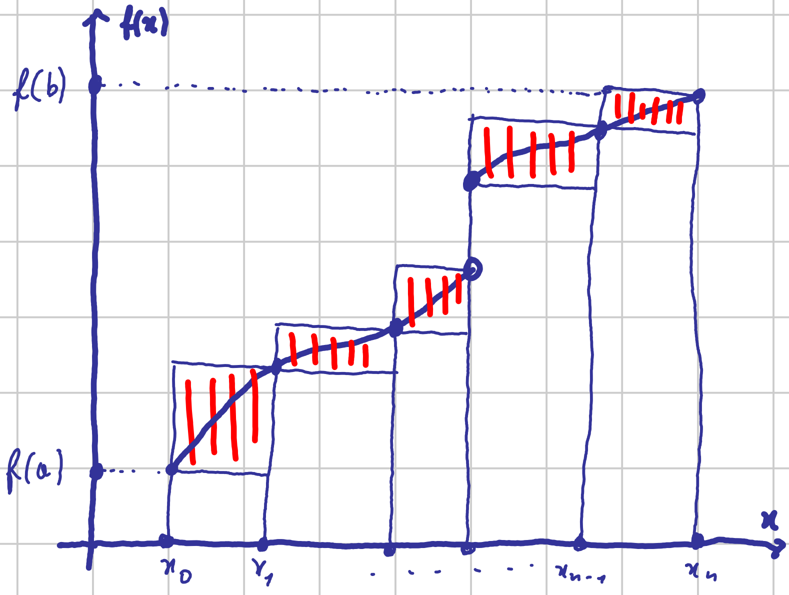
DIMO BASTERÀ TRATTARE IL CASO f CRESCENTE, DOPODICHÉ IL CASO DECRESCENTE SI GESTISCE PASSANDO A $-f$.

SUPPONIAMO DUNQUE f CRESCENTE.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathcal{P}=\{x_0,\dots,x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ T.C.

(14) $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\operatorname{osc}(f,[x_{i-1},x_i]) < \varepsilon$$

IL VALORE DI (14) È L'AREA DELLA ZONA ROSSA IN FIGURA:



L'IDEA È CHE, A CAUSA DELLA MONOTONIA, LA SOMMA DELLE ALTEZZE DEI RETTANGOLINI ROSSI È SEMPRE MINORE O UGUALE A $f(b)-f(a)$.
QUINDI BASTERÀ CHE TUTTE LE BASI SIANO MINORI DI $\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ PERCHÈ LA SOMMA DELLE AREE SIA MINORE DI ε.

FORMALIZZIAMO L'IDEA.

$\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ TALE CHE

$$x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{PER OGNI } i = 1, \dots, n$$

SI OTTIENE:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \boxed{\operatorname{osc}\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right)} \le$$

$\boxed{} \le \boxed{}$ PERCHÈ f È CRESCENTE

$$\le \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \boxed{\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)} <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right| = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \left(f(b) - f(a)\right) = \varepsilon$$

QUESTO DIMOSTRA (14) E QUINDI ANCHE CHE $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

BOZZA DEL 5 MARZO 2020
(SEGNALATEMI EVENTUALI REFUSI)