

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 5

Titolo nota

18 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

DEF.1 DATI DUE POLINOMI $P(x)$ E $Q(x)$, SIA $A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$, LA FUNZIONE

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

SI DICE FUNZIONE RAZIONALE CON NUMERATORE $P(x)$ E DENOMINATORE $Q(x)$.

INOLTRE DIREMO CHE È UN FRATTO SEMPLICE SE È DI UNA DELLE 2 FORME:

(1) $f(x) = \frac{A}{(ax+b)^n} \quad a, b, A \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(2) $f(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \quad a, b, c, A, B \in \mathbb{R}, b^2-4ac < 0$

OSS.1 VEDREMO CHE PER INTEGRARE UNA FUNZIONE RAZIONALE CI SI PUÒ SEMPRE RICONDURRE AL CASO DEI FRATTI SEMPLICI. BASTERÀ QUINDI IMPARARE AD INTEGRARE QUELLI. SE SONO DI TIPO (1) IL PROCEDIMENTO È OVVIO. SE SONO DI TIPO (2) VEDIAMO GLI ESEMPI CHE SEGUONO.

ES.1 CALCOLARE $\int_a^b \frac{x}{(x^2+1)^n} dx$.

SI HA:

$$\int_a^b \frac{x}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{2x}{(x^2+1)^n} dx = \begin{cases} n=1 & \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_a^b \\ n>1 & \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \right]_a^b \end{cases}$$

ES.2 CALCOLARE $I_n = \int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$.

$n=1$ $I_1 = \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_a^b$

REGOLA RICORSIVA $I_{n+1} = \int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_a^b \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_a^b \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} dx =$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^n} dx + \frac{1}{2n} \int_a^b x \cdot (-n) \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \\
&= I_n + \frac{1}{2n} \int_a^b x \cdot \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} \right)' dx = \\
&= I_n + \frac{1}{2n} \cdot \left[x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} \right]_a^b - \frac{1}{2n} \int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \\
&= I_n + \frac{1}{2n} \cdot \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_a^b - \frac{1}{2n} I_n = \\
&= \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n + \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_a^b
\end{aligned}$$

QUINDI PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SAPIAMO CALCOLARE I_n CON LA REGOLA:

$$\begin{cases} I_0 = [\arctan x]_a^b \\ I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n + \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_a^b \end{cases} \quad \text{PER } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

OSS.2 GRAZIE AGLI ESEMPI 1 E 2 SAPIAMO CALCOLARE INTEGRALI DEL TIPO $\int_a^b \frac{Ax+B}{(1+x^2)^n} dx$.
 PER TRATTARE IL CASO GENERALE (2) OSSERVIAMO L'ESEMPIO 3.

ES.3 $\int_3^5 \frac{3x-11}{(2x^2-12x+26)^2} dx = \int_3^5 \frac{3x-11}{4(x^2-6x+13)^2} dx = \frac{1}{64} \int_3^5 \frac{3x-11}{\left(\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1\right)^2} dx =$

(cloud) $x^2 - 6x + 13 =$
 $= x^2 - 6x + 9 + 4 =$
 $= (x-3)^2 + 4 =$
 $= 4\left(\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1\right)$

(cloud) $\varphi(t) = 2t+3$
 SU $[0,1]$

$= \frac{1}{64} \int_0^1 \frac{3(2t+3)-11}{(t^2+1)^2} \cdot (2t+3)' dt =$

(cloud) CONE IN ESEMPIO 2

$= \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{3t-1}{(t^2+1)^2} dt = \dots =$

OSS.3 IN GENERALE SE $b^2 - 4ac < 0$ SI PUO' SEMPRE PASSARE DA ax^2+bx+c A t^2+1
 NEL MODO SEGUENTE:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\
&= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right) = \frac{4ac-b^2}{4a} \cdot \left(\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}} \right)^2 + 1 \right)
\end{aligned}$$

A QUESTO PUNTO BASTA SOSTITUIRE IN x CON $\varphi(t) = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}} \cdot t - \frac{b}{2a}$.

Oss. 4 PASSIAMO ORA AL CASO GENERALE: $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, CON $A(x)$ E $B(x)$ POLINOMI

NON È RIDUTTIVO SUPPORRE CHE $A(x)$ ABBA GRADO MINORE STRETTO DI $B(x)$. INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE, BASTA FARE LA DIVISIONE CON RESTO TRA $A(x)$ E $B(x)$:

$$A(x) : B(x) = Q(x) \text{ con resto } R(x)$$

QUINDI:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{DOVE } \deg(R(x)) < \deg(B(x))$$

PERCIÒ:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{B(x) \cdot Q(x) + R(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

CI SIAMO QUINDI COMUNQUE RICONDOTTI AD UNA FUNZIONE RAZIONALE COL DENOMINATORE DI GRADO STRETTAMENTE MAGGIORE DEL NUMERATORE.

PER CAPIRE COME $\frac{R(x)}{B(x)}$ POSSA ESSERE ESPRESSA COME SOMMA DI FRATTI SEMPLICI, ISPIRIAMOCI ALL'ESEMPIO 4.

Es. 4

$$\int_0^1 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 5x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 4x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{4x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx =$$

$$= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{4x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{4x - 2}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 \left(\frac{3x + 1}{x^2 + 1} - \frac{3}{x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx - 3 \int_0^1 \frac{1}{x + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^1 + \left[\arctan x \right]_0^1 - 3 \left[\ln(x + 1) \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} - 3 \ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \ln 2$$

$$\frac{4x - 2}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1} =$$

$$= \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{(A + C)x^2 + (A + B)x + (B + C)}{(x^2 + 1)(x + 1)}$$

PERCHÉ SIA $\bullet$ BISOGNA (E BASTA) CHE:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 4 \\ B + C = -2 \end{cases} \quad \text{CIOÈ: } \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \\ C = -3 \end{cases}$$

Oss 5

IN GENERALE SE, DOPO AVER SCOMPOSTO IL DENOMINATORE, $f(x)$ È DELLA FORMA:

(3)
$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-x_1)^{n_1} \cdots (x-x_j)^{n_j} \cdot (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} + \cdots + (a_k x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}}$$

CON $\deg(P(x)) < \deg(\text{DENOMINATORE})$ E CON $b_i^2 - 4a_i c_i < 0$ PER OGNI $i=1, \dots, k$.

ALLORA È SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE $f(x)$ COME SOMMA DI FRATTI SEMPLICI NEL MODO SEGUENTE:

(4)
$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + \\ & \vdots \\ & + \frac{A_{j,1}}{x-x_j} + \frac{A_{j,2}}{(x-x_j)^2} + \cdots + \frac{A_{j,n_j}}{(x-x_j)^{n_j}} + \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1,m_1}x + C_{1,m_1}}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1}} + \\ & \vdots \\ & + \frac{B_{k,1}x + C_{k,1}}{a_k x^2 + b_k x + c_k} + \frac{B_{k,2}x + C_{k,2}}{(a_k x^2 + b_k x + c_k)^2} + \cdots + \frac{B_{k,m_k}x + C_{k,m_k}}{(a_k x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}}. \end{aligned}$$

PIÙ PRECISAMENTE VALE IL SEGUENTE

TEO. 1 SE $f(x)$ È DELLA FORMA (3) ALLORA C'È UNO E UN SOLO MODO DI FISSARE LE COSTANTI $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ E $C_{i,j}$ IN MODO TALE CHE VALGA (4).

DI QUESTO TEO. DMETTIAMO LA DIMOSTRAZIONE

OSS. 6 CI SONO ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI STANDARD CHE SI INTEGRANO RICONDUCENDOLE A FUNZIONI RAZIONALI. LE VEDIAMO NEGLI ESEMPI 5 E 6.

ES. 5
$$\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^{3x}}{e^{4x} + 4e^{2x} + 3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{(e^x)^2}{(e^x)^4 + 4(e^x)^2 + 3} \cdot (e^x)' dx =$$

$y = e^x$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{y^4 + 4y^2 + 3} dy = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2} \cdot 2y^2}{(y^2+3)(y^2+1)} dy = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{3y^2+3 - y^2-3}{(y^2+3)(y^2+1)} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{3(y^2+1) - (y^2+3)}{(y^2+3)(y^2+1)} dy = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{y^2+3} - \frac{1}{y^2+1} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dy - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+y^2} dy = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{u^2 + 1} du - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+y^2} dy = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} [\arctan u]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 - \frac{1}{2} [\arctan y]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = (\sqrt{3}-1) \frac{\pi}{24}
\end{aligned}$$

Oss. 7 IL TRUCCO DELL'ES. 5 FUNZIONA SEMPRE SE $f(x) = \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}$ CON $P(y)$ E $Q(y)$ POLINOMI.

VISTO CHE $\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx = \int \frac{P(e^x)}{Q(e^x) \cdot e^x} \cdot (e^x)' dx = \int \frac{P(y)}{Q(y) \cdot y} dy$

ES. 6

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{4 \cos x + 3 \sin x} dx = \\
&= \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\
&= \int_0^1 \frac{2t}{2(1-t^2) + 3t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \\
&= \int_0^1 \frac{2t}{2+3t-2t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{-2t}{(2t+1)(t-2)(t^2+1)} dt = \dots =
\end{aligned}$$

POSTO $t = \tan \frac{x}{2}$, SAPIAMO CHE

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{E} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

MA PER $x \in (-\pi, \pi)$ $t = \tan \frac{x}{2}$ EQUIVALE A

$x = 2 \arctan t$ QUINDI PRENDO PER LA SOSTITUZIONE $\varphi(t) = 2 \arctan t$ SU $[0, 1]$

DECOMporre
IN FRATTI SEMPLICI

Oss. 8

IL METODO DELL'ES. 6 FUNZIONA QUANDO $f(x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$, CON $P(x, y)$

E $Q(x, y)$ POLINOMI. TUTTAVIA SPESSO È MEGLIO USARE DEI TRUCCHI. AD ESEMPIO:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\cos x)^3} \cdot (\cos x)' dx = \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{y^3} dy = \left[\frac{1}{2y^2} \right]_1^{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

È PIÙ CORTO DEL METODO STANDARD:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4t(1+t^2)}{(1-t^2)^3} dt =$$

$\varphi(t) = 2 \arctan t$

$\Rightarrow (t^2-1)'$

$\varphi(t) = t^2-1$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2((t^2-1)+2)}{-(t^2-1)^3} \cdot 2t dt = \int_{-1}^{-\frac{2}{3}} -\frac{2(x+2)}{x^3} dx = \int_{-1}^{-\frac{2}{3}} \left(-\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{x} \right]_{-1}^{-\frac{2}{3}} + \left[\frac{2}{x^2} \right]_{-1}^{-\frac{2}{3}} = (-3+2) + \left(\frac{9}{2} - 2 \right) = \frac{3}{2}$$