

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 8

Titolo nota

25 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INT. IMPROPRI - STUDIO CONVERGENZA (... CONTINUA...)

ES. 1

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$$

SI HA: ① SE $\alpha > 1$ CONVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$
② SE $\alpha < 1$ DIVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$
③ SE $\alpha = 1$ CONVERGE SE $\beta > 1$ E DIVERGE SE $\beta \leq 1$

COMINCIAMO DA ③. SI HA:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^\beta x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{1}{(\ln x)^\beta} \cdot (\ln x)' dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{1}{y^\beta} dy = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy$$

MA L'ULTIMO INTEGRALE È NOTO (ES. 4): SAPPIAMO CHE CONVERGE SE $\beta > 1$ E DIVERGE SE $\beta \leq 1$.

PASSIAMO A ①

SE $\alpha > 1$ POSSO SEMPRE SCRIVERE $\alpha = 1 + \delta$ CON $\delta > 0$. QUINDI:

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1+\delta}} \cdot \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x} \leq \frac{1}{x^{1+\delta}} \quad \text{SU } [x_0, +\infty) \text{ PER UN OPPORTUNO } x_0 \geq ?$$

LA STIMA VALE NON SU TUTTO $[2, +\infty)$
MA SU $[x_0, +\infty)$ PER UN OPPORTUNO x_0 .
QUESTO GRAZIE AL FATTO CHE, ESSENDO $\delta > 0$,
 $\forall \beta \in \mathbb{R}$ SI HA CHE $x^\delta \ln^\beta x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ E QUINDI
 $x^\delta \ln^\beta x > 1$ DA UN CERTO x_0 IN POI

A QUESTO PUNTO, SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\delta}} dx \text{ CONVERGE}$$

APPLICANDO IL CRITERIO DEL CONFRONTO SI OTTIENE CHE ANCHE

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx \text{ CONVERGE PER OGNI } \beta \in \mathbb{R}$$

QUINDI LO STESSO ACCADE PER:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$$

PASSIAMO A (2)

SE $\alpha < 1$ POSSO SEMPRE SCRIVERE $\alpha = 1 - 2\delta$ CON $\delta > 0$. QUINDI:

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1-\delta}} \cdot \frac{x^\delta}{\ln^\beta x} \geq \frac{1}{x^{1-\delta}} \quad \text{SU } [x_0, +\infty) \text{ PER UN OPPORTUNO } x_0 \geq 2$$

LA STIMA VALE NON SU TUTTO $[2, +\infty)$ MA SU $[x_0, +\infty)$ PER UN OPPORTUNO x_0 . QUESTO GRAZIE AL FATTO CHE, ESSENDO $\delta > 0$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ SI HA CHE $\frac{x^\delta}{\ln^\beta x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ E QUINDI $\frac{x^\delta}{\ln^\beta x} > 1$ DA UN CERTO x_0 IN POI

A QUESTO PUNTO, SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{1-\delta}} dx \text{ DIVERGE}$$

APPLICANDO IL CRITERIO DEL CONFRONTO SI OTTIENE CHE ANCHE

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx \text{ DIVERGE PER OGNI } \beta \in \mathbb{R}$$

QUINDI LO STESSO ACCADE PER:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$$

ES. 2

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

① DIVERGE PER $\alpha \geq 1$

② CONVERGE A $\frac{1}{1-\alpha}$ PER $\alpha < 1$

PER VERIFICARLO SI PROCEDE IN MODO ANALOGO ALL'ES. 4 DELLA LEZ. 7.

ES. 3

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} dx$$

SI HA: ① SE $\alpha < 1$ CONVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

② SE $\alpha > 1$ DIVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

③ SE $\alpha = 1$ CONVERGE SE $\beta > 1$ E DIVERGE SE $\beta \leq 1$

I PUNTI ① E ② SI DIMOSTRANO IN MODO ANALOGO ALL'ES. 1, UTILIZZANDO "UN PO'" DELL'ESPONENTE DI x PER "AMMAZZARE" IL TERMINE $|\ln x|^\beta$.

PASSIAMO A ③. SI HA:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x |\ln x|^\beta} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(-\ln x)^\beta} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx \stackrel{\varphi(x) = -\ln x}{=} \lim_{c \rightarrow 0^+} - \int_{-\ln c}^{-\ln \frac{1}{2}} \frac{1}{y^\beta} dy = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{\ln 2}^{\ln \frac{1}{c}} \frac{1}{y^\beta} dy = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy$$

MA SAPPIAMO GIÀ CHE L'ULTIMO INTEGRALE CONVERGE SE E SOLO SE $\beta > 1$.

ES. 9DIRE PER QUALI $\alpha > 0$ CONVERGE

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} dx$$

SVOLGIMENTO

VISTO CHE, PER CERTI VALORI DI $\alpha > 0$, L'INTEGRANDA POTREBBE ESSERE NON LIMITATA PER $x \rightarrow 0^+$, SIAMO OBBLIGATI A STUDIARE SEPARATAMENTE I DUE INTEGRALI IMPROPRI:

$$① = \int_0^1 \frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} dx$$

$$② = \int_1^{+\infty} \frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} dx$$

OSSERVIAMO CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA È POSITIVA PERCHÉ:

$$2x+2 = 2(x+1) \overset{\text{PERCHÉ } x+1 > 1}{>} 2\sqrt{x+1} = \sqrt{4+4x} \overset{\text{PERCHÉ } x > 0}{>} \sqrt{4+2x}$$

QUESTO CI PERMETTERÀ, ALL'OCCORRENZA, DI USARE IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

PER STUDIARE ① OSSERVIAMO CHE, PER $x \rightarrow 0^+$ SI HA:

$$2x+2-\sqrt{4+2x} = 2\left(x+1-\sqrt{1+\frac{x}{2}}\right) = 2\left(x+1-1-\frac{1}{4}x+o(x)\right) \approx \frac{3}{2}x$$

QUINDI:

$$\frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} \approx \frac{\frac{3}{2}x}{x^\alpha \cdot 2^\alpha} = \frac{3}{2^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

MA SAPPIAMO CHE:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx \text{ CONVERGE SE E SOLO SE } \alpha < 2,$$

QUINDI, PER IL CRIT. DEL CONFRONTO ASINTOTICO, ANCHE ① CONVERGE SE E SOLO SE $\alpha < 2$

PER STUDIARE ② OSSERVIAMO CHE, PER $x \rightarrow +\infty$, SI HA:

$$\frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} \approx \frac{2x}{x^{2\alpha}} = 2 \cdot \frac{1}{x^{2\alpha-1}}$$

E SAPPIAMO CHE:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha-1}} dx \text{ CONVERGE } \Leftrightarrow 2\alpha-1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$$

QUINDI, PER IL CRITERIO DEL CONF. ASINTOTICO, ANCHE ② CONVERGE SE E SOLO SE $\alpha > 1$.

QUINDI L'INTEGRALE ASSEGNATO CONVERGE SE E SOLO SE $1 < \alpha < 2$.

OSS.1 SE $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ SONO INTEGRABILI IN SENSO IMPROPRIO SU $[a, b)$ ALLORA ANCHE OGNI LORO COMBINAZIONE LINEARE LO È. INFATTI, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx + \beta \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

QUINDI:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

DEF.1 DATA $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, CON $f \in \mathcal{R}([a, c])$ PER OGNI $c \in [a, b)$, DIREMO CHE f È ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE SU $[a, b)$ SE $\int_a^b |f(x)| dx$ CONVERGE.

OSS.2 SE $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ SONO ASSOLUTAMENTE INTEGRABILI ALLORA OGNI LORO COMBINAZIONE LINEARE È ANCORA ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE.

INFATTI $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b)$ SI HA:

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq |\alpha| \cdot |f(x)| + |\beta| \cdot |g(x)|$$

QUINDI, GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO, PER MOSTRARE CHE:

$$\int_a^b |\alpha f(x) + \beta g(x)| dx \text{ CONVERGE}$$

BASTA MOSTRARE CHE CONVERGE:

$$\int_a^b (|\alpha| \cdot |f(x)| + |\beta| \cdot |g(x)|) dx$$

MA QUESTO SEGUE SUBITO DALL'OSS.1 EDAL FATTO CHE f E g SONO ASSOLUTAMENTE INTEGRABILI.

TEO.1 (CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA)

SE $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ È ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE ALLORA $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE.

DIMO

SAPPIAMO PER IPOTESI CHE $\int_a^b |f(x)| dx$ CONVERGE.

POICHÈ $\forall x \in [a, b)$ SI HA:

$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)| \quad \text{E} \quad 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$$

DAL CRITERIO DEL CONFRONTO SEGUE CHE ANCHE $\int_a^b f^+(x) dx$ E $\int_a^b f^-(x) dx$ CONVERGONO.

QUINDI, GRAZIE ALL'OSS.1, ANCHE $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE PERCHÈ $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

095.3

IL VICEVERSA DEL TEO. 1 NON VALE, VISTO CHE ESISTONO CASI IN CUI $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE MA $\int_a^b |f(x)| dx$ DIVERGE, COME MOSTRA IL PROSSIMO ESEMPIO.

ES. 5

SIA $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, ALLORA $\int_{\pi}^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE MA $\int_{\pi}^{+\infty} |f(x)| dx$ DIVERGE.

SVOLGIMENTO

MOSTRIAMO PRIMA CHE $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ CONVERGE. SI HA:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^C \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^C \frac{1}{x} \cdot (-\cos x)' dx = \\ &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{\pi}^C - \int_{\pi}^C \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = \\ &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos C}{C} + \frac{\cos \pi}{\pi} - \int_{\pi}^C \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

BASTERÀ QUINDI DIMOSTRARE CHE $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ CONVERGE.

ATALE SCOPO SI OSSERVA CHE SU TUTTO L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE SI HA:

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

QUINDI, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO, DALLA CONVERGENZA DI $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ (CHE È NOTA), SEGUE QUELLA DI $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$. A QUESTO PUNTO, ANCHE $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ CONVERGE, GRAZIE AL CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA.

MOSTRIAMO ORA CHE $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ DIVERGE A $+\infty$.

DOBBIAMO QUINDI MOSTRARE CHE, DETTA $F(x) = \int_{\pi}^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$, SI HA $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

TALE LIMITE SO GIÀ CHE ESISTE, PERCHÉ F È CRESCENTE. PER CALCOLARLO BASTA CALCOLARE $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n\pi)$. SI HA:

$$F(n\pi) = \int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \geq$$

SIAMO COSTRETTI A FARE COSÌ PERCHÉ NON ABBIAMO ANCORA FATTO LE SERIE

$$\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \left(-\ln k + \ln(k+1) \right) = \frac{2}{\pi} (\ln(n+1) - \ln 2)$$

QUINDI $F(n\pi) \geq \frac{2}{\pi} (\ln(n+1) - \ln 2)$. MA POICHÉ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} (\ln(n+1) - \ln 2) = +\infty$

ALLORA ANCHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n\pi) = +\infty$.

PER CASA

RIFLETTERE SUI SEGUENTI QUESITI, CHE VERRANNO TRATTATI NELLA LEZIONE 9

- 1 TROVARE $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE MA CON $f(x) \not\rightarrow 0$ PER $x \rightarrow +\infty$.
- 2 COME 1 MA CON f NON LIMITATA SU NESSUNA SEMIRETTA DESTRA.
- 3 COME 2 MA CON LA CONDIZIONE ULTERIORE CHE $f \geq 0$.
- 4 TROVARE $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ TALI CHE $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ PER $x \rightarrow +\infty$ MA $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ E $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ HANNO CARATTERI DIVERSI
- 5 SPIEGARE PERCHÉ 4 NON CONTRADDICE IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO
- 6 GENERALIZZARE IL PROCEDIMENTO UTILIZZATO PER MOSTRARE CHE $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ CONVERGE.
OVVERO DIMOSTRARE CHE SE $f \in C(\mathbb{R})$ È PERIODICA A MEDIA NULLA E $g \in C^1([a, +\infty))$ TENDE A $+\infty$ CRESCENDO, ALLORA $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx$ CONVERGE.