

SERIE NUMERICHE

DEF. 1 DATA LA SUCCESSIONE $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A VALORI IN $\mathbb{R}$, INDICHIAMO CON $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME FINITE, CIOÈ $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. ALLORA DIREMO CHE LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$:

(a) CONVERGE A $\lambda \in \mathbb{R}$, SE $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lambda$

(b) DIVERGE A $+\infty$, SE $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

(c) È INDETERMINATA, SE $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ NON ESISTE.

ES. 1 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ CONVERGE A 1 (SERIE DI MENGOLI).

SI NOTI CHE:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

È TELESCOPICA

DI CONSEGUENZA:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

QUINDI:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$$

CIOÈ LA SERIE CONVERGE A 1.

ES. 2 $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ (SERIE GEOMETRICA)

SI HA:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{SE } q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{SE } q \neq 1 \end{cases}$$

SI OTTIENE OSSERVANDO CHE
 $(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \cdot (1 - q) =$
 $= 1 - \cancel{q} + \cancel{q} - \cancel{q^2} + \cancel{q^2} - \cancel{q^3} + \dots + \cancel{q^n} - q^{n+1} =$
 $= 1 - q^{n+1}$

QUINDI, SE $-1 < q < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

CIO' SIGNIFICA CHE PER $-1 < q < 1$ LA SERIE CONVERGE A $\frac{1}{1 - q}$.

AD ESEMPIO $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ CONVERGE A 2.

SE INVECE $q = 1$ SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$$

CIOE' LA SERIE DIVERGE A $+\infty$.

LO STESSO ACCADE SE $q > 1$, PERCHE'

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - q} + \frac{1}{q - 1} \cdot q^{n+1} \right) = +\infty$$

SE INVECE $q \leq -1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ NON ESISTE PERCHE' S_{2k} E S_{2k+1} HANNO LIMITI DIVERSI.

INFATTI:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{2k+1}}{1 - q} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 + |q|^{2k+1}}{1 + |q|} = \begin{cases} 1 & \text{SE } q = -1 \\ +\infty & \text{SE } q < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{2k+2}}{1 - q} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 - |q|^{2k+2}}{1 - |q|} = \begin{cases} 0 & \text{SE } q = -1 \\ -\infty & \text{SE } q < -1 \end{cases}$$

QUINDI PER $q \leq -1$ LA SERIE E' INDETERMINATA.

RIASSUMENDO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \rightarrow \text{CONVERGE A } \frac{1}{1 - q} & \text{SE } -1 < q < 1 \\ \rightarrow \text{DIVERGE A } +\infty & \text{SE } q \geq 1 \\ \rightarrow \text{E' INDETERMINATA} & \text{SE } q \leq -1. \end{cases}$$

SI NOTINO I CASI PARTICOLARI $q = 1$ E $q = -1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1 \text{ DIVERGE A } +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \text{ E' INDETERMINATA.}$$

ES.3

SONO RICONDUCEBILI A SERIE GEOMETRICHE LE FORMULE PER TRASFORMARE I NUMERI DECIMALI PERIODICI IN FRAZIONI. AD ESEMPIO:

$$\begin{aligned} 0,1\bar{6} &= 0,16666\dots = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \dots = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{6}{100} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Oss. 1

NELL'ESEMPIO PRECEDENTE, AD UN CERTO PUNTO, ABBIAMO BARATO.

PIÙ PRECISAMENTE, QUANDO ABBIAMO SCRITTO:

$$\frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \dots = \frac{6}{10^2} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right)$$

OVVERO, PIÙ FORMALMENTE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{10^{n+2}} = \frac{6}{10^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$$

ABBIAMO DATO PER SCONTATO CHE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE RISPETTO ALL'ADDIZIONE, CHE VALE PER LE SOMME FINITE, VALGA AUTOMATICAMENTE ANCHE PER LE SERIE. ORA, PER FORTUNA, CIÒ È VERO (VEDI TED.1).

TUTTAVIA CI SONO ALTRE PROPRIETÀ, AD ESEMPIO LA ASSOCIATIVA E LA COMMUTATIVA, CHE PUR VALENDO PER LE SOMME FINITE, NON VALGONO PER LE SERIE.

PER FARE UN'IDEA, SE PRENDIAMO $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$, IMMAGINIAMO DI ASSOCIARE I SUOI TERMINI A DUE A DUE NEI SEGUENTI MODI:

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} ((-1)^{2n} + (-1)^{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((-1)^{2n+1} + (-1)^{2n+2}) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 1$$

PUR PARTENDO DALLA STESSA SERIE, METTENDO LE PARENTESI IN MODI DIVERSI, ABBIAMO OTTENUTO 2 SERIE CHE CONVERGONO A VALORI DIVERSI!

PER QUANTO RIGUARDA LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA, SI OSSERVI CHE PRESA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DEFINITA DA:

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{SE } n \text{ È MULTIPLO DI 3} \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

ALLORA $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ È UN RIORDINAMENTO DI $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ (CIOÈ HANNO GLI STESSI TERMINI, A MENO DELL'ORDINE) TUTTAVIA $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ SAPPIAMO CHE È INDETERMINATA, MENTRE

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ DIVERGE A $+\infty$ PERCHÉ LA SUA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È DATA DA:

$$S_n = \begin{cases} k-1 & \text{SE } n = 3k \\ k & \text{SE } n = 3k+1 \\ k+1 & \text{SE } n = 3k+2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow k \in \mathbb{N} \\ \leftarrow k \in \mathbb{N} \\ \leftarrow k \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

QUINDI $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

TEO. 1 (PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLE SERIE)

DATE LE SUCCESSIONI $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ALLORA VALGONO LE PROPRIETÀ:

IL VICEVERSA
NON VALE,
VEDI ES. 4

- (1) SE $\sum a_n$ CONVERGE ALLORA $a_n \rightarrow 0$ (COND. NECESSARIA DI CONVERGENZA)
- (2) SE $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ALLORA $\sum a_n$ E $\sum \lambda a_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE. INOLTRE, QUANDO CONVERGONO SI HA $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$ (PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA)
- (3) SE $\sum a_n$ E $\sum b_n$ CONVERGONO ALLORA $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ CONVERGE A $\alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$
- (4) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE
- (5) SE $\sum a_n$ CONVERGE ALLORA $\sum b_n$ E $\sum (a_n + b_n)$ HANNO LO STESSO CARATTERE.
- (6) SE $\sum a_n$ CONVERGE ALLORA $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} a_n = 0$
- (7) SE $a_n \geq 0$, DEFINITIVAMENTE IN n , ALLORA $\sum a_n$ NON PUÒ ESSERE INDETERMINATA.

DIMO

- (1) PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SIA $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. DIRE CHE $\sum a_n$ CONVERGE SIGNIFICA CHE $\exists l \in \mathbb{R}$ TALE CHE $S_n \rightarrow l$. SI OSSERVI CHE:

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$$

QUINDI:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

DA CUI SEGUE:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = l - l = 0$$

QUINDI SE $\sum a_n$ CONVERGE ALLORA $a_n \rightarrow 0$. (IL VICEVERSA NON VALE, VEDI ES. 4)

- (2) SIANO (S_n) E (b_n) LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$ E $\sum \lambda a_n$ RISPETTIVAMENTE. ALLORA SI HA:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n) = \\ &= \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \end{aligned}$$

QUINDI $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ E $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO (CIOÈ QUANDO UNO È FINITO (O INFINITO O NON ESISTE) L'ALTRO FA LO STESSO).

QUESTO SIGNIFICA CHE $\sum a_n$ E $\sum \lambda a_n$ HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE.

IN PARTICOLARE, QUANDO CONVERGONO, $\sum \lambda a_n$ CONVERGE A $\lambda \cdot \sum a_n$.

(3) SIANO (S_n) , (δ_n) E (γ_n) LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$, $\sum b_n$ E $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$, RISPETTIVAMENTE. SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\alpha \sum_{k=0}^n a_k + \beta \sum_{k=0}^n b_k \right) =$$

$$= \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k + \beta \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n b_k =$$

$$= \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n + \beta \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n =$$

$$= \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$$

È UN ABUSO DI LINGUAGGIO CHE SI FA SPESSO: ABBIAMO INDICATO CON $\sum a_n$ E $\sum b_n$ NON LE SERIE, MA I VALORI A CUI CONVERGONO

QUINDI $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ CONVERGE A $\alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$.

(4) SIANO $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ E $(\gamma_n)_{n \geq n_0}$ LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, RISPETTIVAMENTE.

ALLORA PER OGNI $n > n_0$ SI HA

$$S_n = \overbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0-1}}^{S_{n_0}} + \overbrace{a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n}^{\gamma_n} = S_{n_0} + \gamma_n$$

QUINDI:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n_0}) = -S_{n_0} + \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

QUINDI: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$ E $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO.

CIÒ SIGNIFICA CHE $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

(5) SIANO (S_n) , (δ_n) E (γ_n) LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$, $\sum b_n$ E $\sum (a_n + b_n)$ RISPETTIVAMENTE. ALLORA

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k = S_n + \delta_n$$

QUINDI:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n + \delta_n)$$

MA, SICCOME $\sum a_n$ CONVERGE, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ESISTE FINITO, QUINDI $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n + \delta_n)$ HA LO STESSO

COMPORTAMENTO DI $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. CIÒ SIGNIFICA CHE $\sum b_n$ E $\sum (a_n + b_n)$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

(6) SIA λ IL VALORE A CUI CONVERGE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E SIA (S_n) LA SUCCESIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. DAL PUNTO (4) SAPPIAMO GIÀ CHE $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$ CONVERGE AD UN VALORE λ_m DATO DA:

$$\lambda_m = -S_{m-1} + \lambda$$

MA, SICCOME $S_m \rightarrow \lambda$, ABBIAMO:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} (-S_{m-1} + \lambda) = -\lambda + \lambda = 0.$$

(7) SIA (S_n) LA SUCCESIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$. SE PER $n \geq n_0$ SI HA $a_n \geq 0$ ALLORA PER $n \geq n_0$ SI HA:

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$$

PERCHÉ $a_n \geq 0$

QUINDI DA n_0 INPOI S_n È CRESCENTE. DI CONSEGUENZA $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ESISTE E QUINDI $\sum a_n$ NON È INDETERMINATA

ES. 4 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE.

SIA (S_n) LA SUCCESIONE DELLE SUE SOMME FINITE. SICCOME LA SERIE È A TERMINI POSITIVI: SAPPIAMO CHE (S_n) È CRESCENTE E QUINDI HA SEMPRE LIMITE. PERTROVARLO BASTA DUNQUE PRENDERE LA SOTTOSUCCESIONE DI (S_n) CHE PREFERIAMO. SCEGLIAMO (S_{2^k}) . SI HA:

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_2 + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_4 + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_k = 1 + \frac{1}{2}k \end{aligned}$$

QUINDI $S_{2^k} \geq 1 + \frac{1}{2}k$ DA CUI SEGUE CHE $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2^k} = +\infty$. QUINDI $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE.

TEO. 2 (CRITERIO DI CAUCHY)

DATA LA SUCCESSIONE (a_n) A VALORI IN $\mathbb{R}$. ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $\sum a_n$ CONVERGE

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n, m \in \mathbb{N}$ CON $n \geq m \geq n_0$ SI HA $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$

DIMO

SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$.

ALLORA LA (1) EQUIVALE A:

(1') (S_n) HA LIMITE FINITO PER $n \rightarrow +\infty$

INVECE LA (2) EQUIVALE A:

(2') $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n, m \in \mathbb{N}$ CON $n \geq m \geq n_0$ SI HA $|S_n - S_{m-1}| < \varepsilon$

MA LA (2') SIGNIFICA CHE (S_n) È DI CAUCHY QUINDI SAPPIAMO GIÀ CHE È EQUIVALENTE A (1').

ES 5 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}{n}$ NON CONVERGE.

GRAZIE AL CRITERIO DI CAUCHY BASTA FAR VEDERE CHE COMUNQUE SI PRENDA n_0 , $\exists n, m \geq n_0$

TALI CHE $\sum_{k=m}^n a_k \geq \frac{1}{2}$.

QUINDI, COMUNQUE SIA FISSATO n_0 PRENDIAMO $h \in \mathbb{N}$ TALE CHE $2^{2h} > n_0$ E PONIAMO

$m = 2^{2h}$ E $n = 2^{2h+1} - 1$. OTTENIAMO:

$$\sum_{k=m}^n \frac{(-1)^{\lfloor \log_2 k \rfloor}}{k} = \sum_{k=2^{2h}}^{2^{2h+1}-1} \frac{(-1)^{\lfloor \log_2 k \rfloor}}{k} = \sum_{k=2^{2h}}^{2^{2h+1}-1} \frac{1}{k} > \sum_{k=2^{2h}}^{2^{2h+1}-1} \frac{1}{2^{2h+1}} = 2^{2h} \cdot \frac{1}{2^{2h+1}} = \frac{1}{2}$$

PERCHÉ $k < 2^{2h+1}$

PERCHÉ CI SONO 2^{2h} TERMINI TUTTI UGUALI A $\frac{1}{2^{2h+1}}$

PERCHÉ ESSENDO $2^{2h} \leq k < 2^{2h+1}$ SI HA $2h \leq \log_2 k < 2h+1$, QUINDI $\lfloor \log_2 k \rfloor = 2h$

ABBIAMO QUINDI MOSTRATO CHE COMUNQUE SI FISSI $n_0 \in \mathbb{N}$ ESISTONO $n, m \in \mathbb{N}$

CON $n > m > n_0$ TALI CHE $\sum_{k=m}^n a_k > \frac{1}{2}$.

QUESTO SIGNIFICA CHE LA CONDIZIONE (2) DEL CRITERIO DI CAUCHY NON È SODDISFATTA

PER $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. QUINDI $\sum a_n$ NON CONVERGE.