Analisi Matematica (II modulo)- Lez. 16

Titolo nota 15/08/2014

15 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

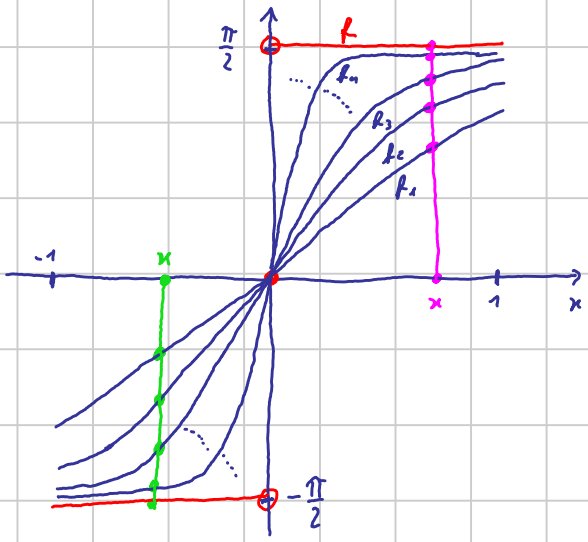
SUCCESSIONI DI FUNZIONI

DEF.0 DATO UN INSIEME U, UNA SUCCESSIONE A VALORI IN U È UNA FUNZIONE $f: \mathbb{N} \to U$, CIOÈ UNA FUNZIONE CHE AD OGNI INDICE $n \in \mathbb{N}$ ASSOCIA UN ELEMENTO $u_n \in U$. (COME AL SOLITO PER INDICARE LA SUCCESSIONE USEREMO IL SIMBOLO $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ O ANCHE SOLO (u_n)).

OSS.0 OVVIAMENTE, IN QUESTA LEZIONE E NELLE SUCCESSIVE, CI OCCUPIAMO DEL CASO IN CUI U È UN INSIEME DI FUNZIONI.

ES.1 SIA U = INSIEME DI TUTTE LE FUNZIONI DA $[-1,1]$ IN $\mathbb{R}$, E SIA $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ LA SUCCESSIONE IL CUI TERMINE n-ESIMO È LA FUNZIONE $f_n(x) = \arctan(nx)$.

NELLA FIGURA A FIANCO ABBIAMO RAPPRESENTATO LA SEQUENZA DEI GRAFICI DI $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$ EVIDENZIANDO IL FATTO CHE COMUNQUE SI PRENDA $x \in (0,1]$ SI HA:



$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \arctan(nx) = \frac{\pi}{2}$$

ANALOGAMENTE, PER OGNI FISSATO $x \in [-1,0)$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \arctan(nx) = -\frac{\pi}{2}$$

INVECE PER $x=0$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} \arctan(n\cdot 0) = 0$$

INSOMMA, SE DEFINIAMO $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{PER } x\in[-1,0) \\ 0 & \text{PER } x=0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{PER } x\in(0,1] \end{cases}$, PER OGNI FISSATO $x\in[-1,1]$ SI HA $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

ESPRIMEREMO QUESTO FATTO DICENDO CHE $f_n \to f$ PUNTUALMENTE.

PIÙ IN GENERALE DIAMO LA SEGUENTE DEFINIZIONE:

DEF. 1 DATO $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ ED $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CON $f_n: I \to \mathbb{R}$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, DIREMO CHE

(a) $f_n \longrightarrow f$ PUNTUALMENTE SE $\forall x \in I \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

(b) $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall x \in I \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

OSS. 1 SE SCRIVIAMO (a) IN SIMBOLI OTTENIAMO:

(1) $\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

MENTRE (b) È:

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall x \in I \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

A PRIMA VISTA SEMBRANO QUASI UGUALI, MA NON È COSÌ PERCHÈ NELLA (2) n_0 È LO STESSO PER TUTTI GLI $x \in I$.

PER APPREZZARNE MEGLIO LA DIFFERENZA È OPPORTUNO TROVARE MODI EQUIVALENTI (MA CON MAGGIOR EVIDENZA INTUITIVA) DI ESPRIMERE LA (2).

LO FACCIAMO NEL SEGUENTE TEOREMA:

TEO. 1 DATI $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ ED $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CON $f_n: I \to \mathbb{R}$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$.

ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE (CIOÈ VALE (2))

(b) $\forall \varepsilon > 0$ DEFINITIVAMENTE IN n IL GRAFICO DI f_n STA TRA QUELLO DI $f - \varepsilon$ E QUELLO DI $f + \varepsilon$.

(c) $\forall \varepsilon > 0$ DEFINITIVAMENTE IN n $d(f, f_n) < \varepsilon$, DOVE $d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$

DIMO

RICORDANDO CHE (2) È:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall x \in I \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

METTERE "$\leq$" INVECE CHE "$<$" NON CAMBIA NULLA PERCHÈ SI RICHIEDE CHE VALGA $\forall \varepsilon > 0$

VALGONO TUTTE LE EQUIVALENZE:

$\forall x \in I \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\forall x \in I \quad f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$

$\sup_{x \in I} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

(3) SU TUTTO I IL GRAFICO DI f_n STA TRA IL GRAFICO DI $f - \varepsilon$ E QUELLO DI $f + \varepsilon$

(4) $d(f, f_n) \leq \varepsilon$

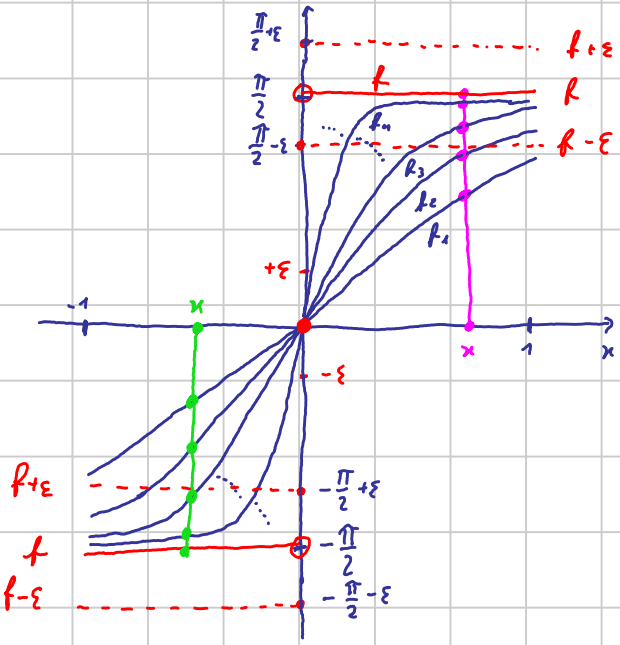
QUINDI (a), (b) E (c) SONO SOLO MODI DIVERSI DI DIRE LA STESSA COSA, VISTO CHE (b) È COME DIRE CHE:

$\forall \varepsilon > 0$ DEFINITIVAMENTE IN n VALE (3)

MENTRE (c) È COME DIRE CHE:

$\forall \varepsilon > 0$ DEFINITIVAMENTE IN n VALE (4)

OSS. 2 LA CONVERGENZA UNIFORME È UNA CONDIZIONE **PIÙ FORTE** DELLA CONV. PUNTUALE. MENTRE INFATTI È OVVIO CHE LA CONV. UNIFORME IMPLICHI LA PUNTUALE, VISTO CHE $|f_n(x) - f(x)| \leq d(f, f_n)$, IL VICEVERSA NON VALE PERCHÉ CI SONO CASI, COME L'ES. 1, IN CUI LA CONVERGENZA È PUNTUALE MA NON UNIFORME.



PER CONVINCERSI CHE LA CONV. NON È UNIFORME BASTA OSSERVARE CHE SE $0 < \varepsilon < 1$, IL GRAFICO DI f_n NON È MAI TUTTO CONTENUTO NEL "TUBICINO" DELIMITATO DA $f-\varepsilon$ ED $f+\varepsilon$.

ES. 2 PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ DEFINIAMO $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. DI (f_n) STUDIARE LA CONVERGENZA:

a) PUNTUALE SU $\mathbb{R}$

b) UNIFORME SU $\mathbb{R}$

c) UNIFORME SU $[a, +\infty)$ CON $a > 0$

d) UNIFORME SU $(0, +\infty)$

RISPOSTE		
a)	SI	
b)	NO	
c)	SI	$\forall a > 0$
d)	NO	

SVOLGIMENTO

a) PER $x = 0$ SI HA $f_n(0) = \frac{n \cdot 0}{1+n^2 \cdot 0} = 0 \to 0$.

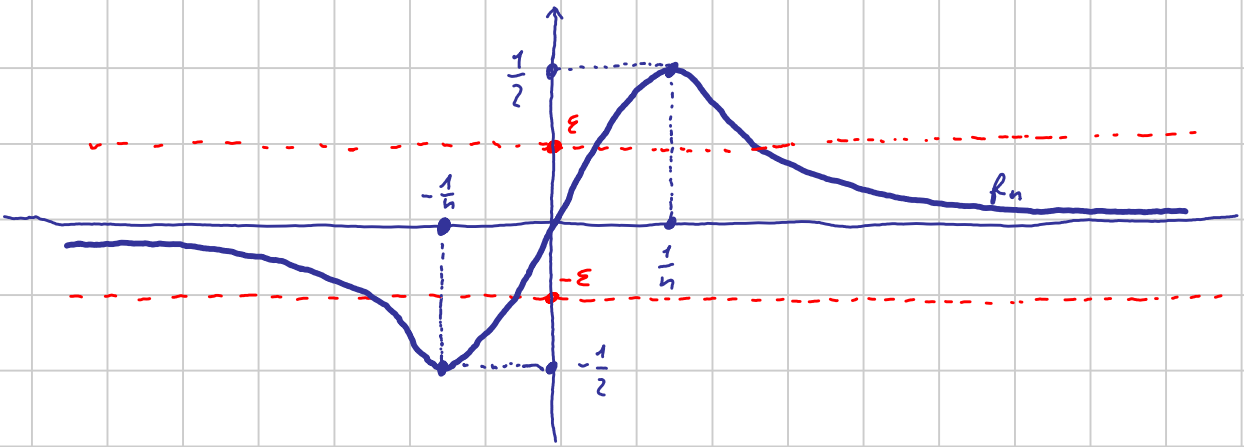
PER $x \neq 0$ SI HA:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{nx} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2x^2}+1} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

QUINDI, PRESA COME f LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA, AVREMO CHE

$f_n \to f$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

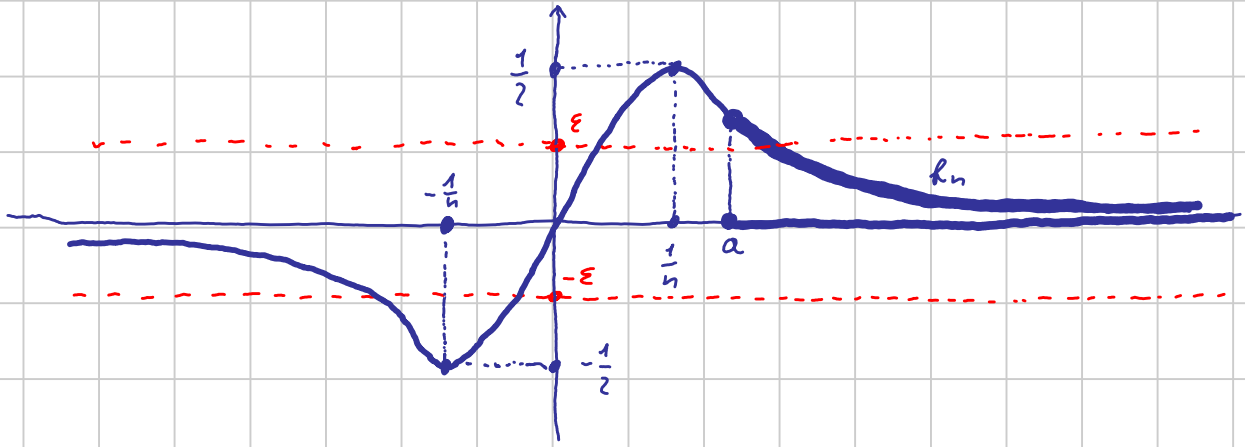
b) CON FACILI CALCOLI SI TROVA CHE IL GRAFICO DI $f_n(x)$ È IL SEGUENTE:



DI CONSEGUENZA SE $\varepsilon < \frac{1}{2}$ IL GRAFICO DI f_n NON È MAI TUTTO COMPRESO TRA $-\varepsilon$ E ε.

QUINDI SU $\mathbb{R}$ LA CONVERGENZA DI f_n NON È UNIFORME.

c) SE $a > 0$, DA UN CERTO n_0 IN POI SI AVRÀ CHE $0 < \frac{1}{n} < a$ (VEDI FIGURA):



QUINDI, DEFINITIVAMENTE IN n, SU $[a, +\infty)$ SI HA:

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(a) - f(a)| = f_n(a)$$

MA ALLORA DA $f_n(a) \to 0$ SEGUE $d(f_n, f) \to 0$.

QUINDI SU $[a, +\infty)$ LA CONVERGENZA È UNIFORME.

d) SU $(0, +\infty)$ VALGONO INVECE LE STESSE CONSIDERAZIONI FATTE SU TUTTO $\mathbb{R}$, QUINDI LA CONVERGENZA NON È UNIFORME.

LO STUDENTE NOTI CHE ANCHE SE HO LA CONVERBENZA UNIFORME SU TUTTI GLI INSIEMI DI TIPO $[a, +\infty)$ NON CE L'HO SULLA LORO UNIONE $(0, +\infty)$.

OSS. 3 QUANDO HO UNA SUCCESSIONE (f_n) E SO GIÀ CHE $f_n \to f$ PUNTUALMENTE UN MODO PER VERIFICARE CHE LA CONVERGENZA NON È UNIFORME CONSISTE NEL VERIFICARE CHE TUTTE LE f_n SONO CONTINUE MA f NON LO È. QUESTO GRAZIE AL SEGUENTE TEOREMA:

TEO. 2 SIANO $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ ED $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI DA I A $\mathbb{R}$ TALI CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE. PRESO $x_0 \in I$, SE TUTTE LE f_n SONO CONTINUE IN x_0, ALLORA ANCHE f È CONTINUA IN x_0.

DIMO

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE:

(5) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

A TALE SCOPO SI OSSERVI CHE, VISTO CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE, PER OGNI FISSATO $\varepsilon > 0$ SI RIESCE A TROVARE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE:

(6) $$\forall x \in I \quad |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ORA, ESSENDO f_{n_0} CONTINUA IN x_0, POSSIAMO PRENDERE $\delta > 0$ TALE CHE:

(7) $$\forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

DI CONSEGUENZA, $\forall x \in I$ TALE CHE $|x - x_0| < \delta$ SI HA:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

GRAZIE A (6)

GRAZIE A (7)

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

QUINDI VALE (5).

$C(I) = \{f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ CONTINUA}\}$

COROLLARIO 1 DATI $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ ED $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ SUCCESSIONE A VALORI IN $C(I)$, TALE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE. ALLORA ANCHE $f \in C(I)$.

DIMO

BASTA OSSERVARE CHE $\forall x_0 \in I$ SI PUÒ APPLICARE IL TEO. 2

ES. 3 DATA $(f_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ DOVE $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$.

(a) f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE SU $[0,1]$?

(b) f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE SU $(0,1]$?

SVOLGIMENTO

PRIMA DI RISPONDERE AD (a) O (b) OSSERVIAMO CHE:

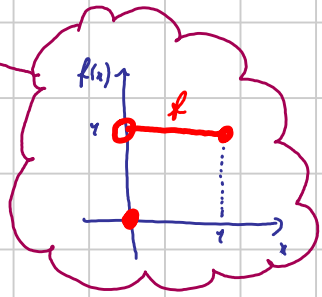
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

MENTRE SE $x \in (0,1]$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

QUINDI, POSTO:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x = 0 \\ 1 & \text{SE } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



ABBIAMO CHE $f_n \to f$ PUNTUALMENTE.

SIAMO PRONTI A RISPONDERE AI QUESITI

SE f_n CONVERGESSE UNIFORMEMENTE DOVREBBE CONVERGERE AD f, VISTO CHE GIÀ CI CONVERGE PUNTUALMENTE, MA SU $[0,1]$ QUESTO È IMPOSSIBILE PERCHÈ TUTTE LE f_n SONO CONTINUE MENTRE f È DISCONTINUA, IN CONTRASTO COL COROLLARIO 1.

QUINDI SU $[0,1]$ LA CONVERGENZA NON È UNIFORME.

MA NON PUÒ ESSERLO NEMMENO SU $(0,1]$ PERCHÈ, SICCOME $\forall n$ SI HA $f_n(0) = 0 = f(0)$, ALLORA

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1]} |f_n(x) - f(x)|$$

QUINDI $d(f_n, f)$ HA LO STESSO VALORE SU $(0,1]$ E SU $[0,1]$.

QUINDI, NON ESSENDOCI CONV. UNIFORME SU $[0,1]$ NON C'È NEMMENO SU $(0,1]$

OSS. 4 PER CONCLUDERE QUALCHE RISULTATO CHE CI È UTILE PER LE SERIE NUMERICHE (SI RICORDI CHE IL COMPORTAMENTO DI UNA SERIE È DETERMINATO DA QUELLO DELLA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE)

ES. 4 PRENDIAMO SU $[-a, a]$ (CON $a > 0$) LA FUNZIONE $f(x) = e^x$ E LA SUCCESSIONE $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, DOVE:

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \text{POL. DI TAYLOR DI ORDINE } n \text{ DI } e^x.$$

MOSTRARE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SU $[-a, a]$, PER OGNI $a > 0$.

SVOLGIMENTO

DOBBIAMO MOSTRARE CHE:

(8) $\forall \varepsilon > 0$ DEFINITIVAMENTE IN n_0 $\quad d(f, f_n) \leq \varepsilon$

A TALE SCOPO RICORDIAMO CHE, PER IL TEO. DEL RESTO DI LAGRANGE, $\exists\, \xi_x$ COMPRESO TRA 0 E x TALE CHE:

$$|R(x) - f_n(x)| = \left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| = \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi_x) \cdot x^{n+1} \right| = \left| \frac{e^{\xi_x} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

QUINDI:

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [-a,a]} \left| \frac{e^{\xi_n} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{e^a \cdot a^{n+1}}{(n+1)!}$$

MA PER OGNI FISSATO $a > 0$ SAPPIAMO CHE:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^a \cdot a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

CIÒ SIGNIFICA CHE, COMUNQUE SI SCELGA $a > 0$, SE $d(f, f_n)$ VIENE PRESA SU $[-a, a]$, ALLORA $d(f, f_n) \to 0$ PER $n \to +\infty$. QUINDI VALE **(8)**.

OSS. 5 VISTO CHE LA CONVERGENZA UNIFORME IMPLICA LA CONVERGENZA PUNTUALE, SE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ CONSIDERIAMO LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ E INDICHIAMO CON (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME FINITE, OTTENIAMO:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$$

CIÒ SIGNIFICA CHE PER OGNI FISSATO $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ CONVERGE A e^x.

IN PARTICOLARE $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.