Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 17

Titolo nota 15/08/2014

17 aprile 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SUCCESSIONI DI FUNZIONI (...CONTINUA...)

DEF. 1 DATO $I \subset \mathbb{R}$ DEFINIAMO $B(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ È LIMITATA} \}$

OSS. 1 DATE $f, g : I \to \mathbb{R}$, SE COME AL SOLITO PONIAMO $d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$,

QUANDO $f, g \in B(I)$ SI HA SEMPRE $d(f,g) < +\infty$. INFATTI:

$$d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| \le \sup_{x \in I} \left(|f(x)| + |g(x)| \right) \le \underbrace{\sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)|}_{\text{STANNO ENTRAMBI IN } \mathbb{R} \text{ PERCHÉ } f,g \in B(I)} \in \mathbb{R}$$

TEO. 1 (PROPRIETÀ DI $d(f,g)$)

DATO $I \subset \mathbb{R}$, $\forall f, g, h \in B(I)$ SI HA:

(1) $d(f,g) \ge 0$ CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $f = g$

(2) $d(f,g) = d(g,f)$ (SIMMETRIA)

(3) $d(f,h) \le d(f,g) + d(g,h)$ (DISUG. TRIANGOLARE)

DIMO

(1) E **(2)** SONO OVVIE. DIMOSTRIAMO **(3)**:

$$d(f,h) = \sup_{x \in I} |f(x) - h(x)| = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \le$$

$$\le \sup_{x \in I} \left(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \right) \le$$

$$\le \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in I} |g(x) - h(x)| = d(f,g) + d(g,h)$$

OSS. 2 QUANDO, NEL CORSO DI ANALISI 3, ALLO STUDENTE VERRÀ INTRODOTTO IL CONCETTO DI SPAZIO METRICO RIASSUMERÀ L'OSS. 1 E IL TEO. 1 DICENDO CHE "d" È UNA DISTANZA SU $B(I)$, CIOÈ CHE LA COPPIA $(B(I), d)$ È UNO SPAZIO METRICO.

DEF.2 DATI $I \subset \mathbb{R}$ E $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONE A VALORI IN $B(I)$, DIREMO CHE $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ È DI CAUCHY SE:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ TALE CHE } \forall n,m\in\mathbb{N} \quad n,m\geq n_0 \Rightarrow d(f_n,f_m)<\varepsilon$$

TEO.2 (COMPLETEZZA DI $B(I)$)

DATI $I\subset\mathbb{R}$ E $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONE A VALORI IN $B(I)$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $\exists f\in B(I)$ TALE CHE $f_n\longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE

(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ È DI CAUCHY

DIMO

(1)⇒(2)

DIRE CHE VALE **(1)** SIGNIFICA CHE:

$$\forall\varepsilon>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ TALE CHE } n\geq n_0 \Rightarrow d(f_n,f)<\frac{\varepsilon}{2}$$

MA ALLORA, $\forall n,m\geq n_0$ SI HA:

$$d(f_n,f_m)\leq d(f_n,f)+d(f,f_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

QUINDI $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ È DI CAUCHY.

(2)⇒(1)

PER OGNI FISSATO $x\in I$ SI HA:

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq \sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)| = d(f_n,f_m)$$

QUINDI, DAL FATTO CHE È DI CAUCHY (f_n) SEGUE CHE È DI CAUCHY ANCHE LA SUCCESSIONE NUMERICA $(f_n(x))$.

MA ALLORA, ESSENDO $\mathbb{R}$ COMPLETO, $(f_n(x))$ HA LIMITE FINITO.

POSSIAMO ALLORA DEFINIRE LA FUNZIONE:

$$f: I \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

È IMMEDIATO DALLA DEFINIZIONE DI f, CHE $f_n\to f$ PUNTUALMENTE.

RIMANE DA DIMOSTRARE CHE f È LIMITATA E CHE $f_n\to f$ UNIFORMEMENTE.

MOSTRIAMO PRIMA LA LIMITATEZZA.

GRAZIE A **(1)** SAPPIAMO CHE $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f_m) < 1$$

IN PARTICOLARE, $\forall m \geq n_0$ SI HA:

$$d(f_{n_0}, f_m) < 1$$

CIOÈ, $\forall m \geq n_0$ E $\forall x \in I$, SI HA:

$$|f_{n_0}(x) - f_m(x)| < 1$$

QUINDI, PASSANDO AL LIMITE PER $m \to +\infty$ PER OGNI FISSATO $x \in I$, SI HA:

$$\lim_{m \to +\infty} |f_{n_0}(x) - f_m(x)| \leq 1$$

CIOÈ:

$$\boxed{|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq 1}$$

GRAZIE A $\boxed{A}$

PERCHÈ f_{n_0} È LIMITATA

QUINDI:

$$\sup_{x \in I} |f(x)| = \sup_{x \in I} |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq \sup_{x \in I} \left(|f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \right) \leq 1 + \sup_{x \in I} |f_{n_0}(x)| < +\infty$$

QUINDI f È LIMITATA.

MOSTRIAMO ORA CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE.

SEMPRE GRAZIE A **(2)** SI HA CHE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

CIOÈ:

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in I \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

DI CONSEGUENZA, PASSANDO AL LIMITE PER $m \to +\infty$, SI OTTIENE

$$n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in I \quad \lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

CIOÈ:

$$n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

CIOÈ

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f) \leq \varepsilon$$

RIASSUMENDO, ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n \in \mathbb{N} \ n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f) \leq \varepsilon$

CIOÈ CHE $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

COROLLARIO 1 (COMPLETEZZA DI $C(I)$)

DATI $I \subset \mathbb{R}$, CON I COMPATTO, ED $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ SUCCESSIONE A VALORI IN $C(I)$, ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $\exists f \in C(I)$ TALE CHE $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

(2) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È DI CAUCHY.

DIMO

SI OSSERVI CHE, ESSENDO I COMPATTO, SI HA $C(I) \subset B(I)$, GRAZIE AL TEOREMA DI WEIERSTRASS.

QUINDI (1) $\Rightarrow$ (2) È GRATIS, VISTO CHE SAPPIAMO GIÀ CHE VALE IN $B(I)$.

PER QUANTO RIGUARDA (2) $\Rightarrow$ (1), SEMPRE GRAZIE AL TEO. 2 SAPPIAMO CHE $\exists f \in B(I)$ TALE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE. MA TALE f È NECESSARIAMENTE CONTINUA, PERCHÈ LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI CONTINUE. CIÒ CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE.

PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO $\int_a^b$ E $(\ )'$

TEO.3 DATI $f \in \mathcal{R}([a,b])$ ED $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A VALORI IN $\mathcal{R}([a,b])$, SE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE ALLORA $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

DIMO

POICHÈ $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

QUINDI PER $n \geq n_0$ SI HA:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

CIÒ SIGNIFICA CHE $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

OSS. 3 SE NEL $\boxed{\text{TEO. 3}}$ LA CONVERGENZA FOSSE SOLO PUNTUALE IL TEOREMA NON PUÒ VALERE: COME CONTROESEMPIO BASTA PRENDERE $f_n(x) = n \cdot \chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ E SI HA $f_n \to 0$ PUNTUALMENTE

MA:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \not\to 0 = \int_0^1 0\,dx$$