

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 23

Titolo nota

15/08/2014

4 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI (...CONTINUA...)

OSS. 1

NELLA LEZIONE PRECEDENTE ABBIAMO VISTO COME TROVARE LA SOLUZIONE DI UN PROB. DI CAUCHY CON L'EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI, GIUSTIFICANDO OGNI PASSAGGIO. IN TAL MODO SIAMO SICURI CHE LA FUNZIONE $y(x)$ CHE SI TROVA ALLA FINE DEL PROCEDIMENTO È LA SOLUZIONE CERCATA, SENZA BISOGNO DI ULTERIORI VERIFICHE.

IN ALTERNATIVA LO STUDENTE PUÒ FARE TUTTI I CALCOLI SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE: IN TAL MODO LA FUNZIONE $y(x)$ CHE SI TROVA È SOLO UNA "CANDIDATA SOLUZIONE" E SOLO DOPO LA VERIFICA DIRETTA POSSO DIRE CHE È DAVVERO UNA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY. SE POI SONO ANCHE VERIFICATE LE IPOTESI DEL TEO. ES. È UNIC., POSSO ANCHE DIRE CHE NON CE NE SONO ALTRE.

VEDIAMO QUESTO MODO DI PROCEDERE NEL PROSSIMO ESEMPIO.

ES. 1

TROVARE LA SOL. DEL PROB. DI CAUCHY:
$$\begin{cases} y' = xy - \frac{4x}{y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

NEI CASI $y_0 = \sqrt{3}$, $y_0 = \sqrt{5}$, $y_0 = -\sqrt{3}$, $y_0 = -\sqrt{5}$.

SVOLGIMENTO

PER COMINCIARE CERCHIAMO, SENZA CURARCI DEL DATO INIZIALE, COME DEVE ESSERE FATTA LA GENERICA SOL. $y(x)$ DELL'EQUAZ. DIFF.:

$$y'(x) = xy(x) - \frac{4x}{y(x)}$$

CIOÈ:

(1)

$$y'(x) = \frac{(y(x))^2 - 4}{y(x)} \cdot x$$

TOLTE LE 2 SOL COSTANTI $y(x) = 2$ E $y(x) = -2$, PER CERCARE LE ALTRE, RISCRIVIAMO (1) NEL MODO SEGUENTE:

(2)

$$\frac{2 \cdot y(x)}{(y(x))^2 - 4} y'(x) = 2x$$

DETTA $h(y) = \frac{2y}{y^2-4}$, LA (2) PUÒ ESSERE SCRITTA:

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = 2x$$

CIOÈ:

$$\left(H(y(x)) \right)' = (x^2)'$$

DOVE $H(y)$ È UNA PRIMITIVA DI $h(y)$, CIOÈ:

$$H(y) = \int h(y) dy = \frac{2y}{y^2-4} = \ln |y^2-4|$$

OTTENIAMO QUINDI:

$$\left(\ln |(y(x))^2 - 4| \right)' = (x^2)'$$

DA CUI SEGUE:

$$\ln |(y(x))^2 - 4| = x^2 + C \quad C \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$(y(x))^2 - 4 = \pm e^C \cdot e^{x^2} \quad C \in \mathbb{R}$$

SE ORA, A TALI SOLUZIONI AGGIUNGIAMO LE 2 SOL. COSTANTI GIÀ TROVATE $y(x) = \pm 2$, L'INSIEME DI TUTTE LE SOL. CHE ABBIAMO TROVATO È:

$$(y(x))^2 - 4 = k e^{x^2} \quad k \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$y(x) = \pm \sqrt{4 + k e^{x^2}} \quad k \in \mathbb{R}$$

DI TALI SOLUZIONI, QUELLA TALE CHE $y(0) = \sqrt{3}$ SI OTTIENE SE

$$\sqrt{3} = \pm \sqrt{4 + k \cdot e^0}$$

CIOÈ SCEGLIENDO IL SEGNO "+" DAVANTI ALLA RADICE E CON $k = -1$, QUINDI È

(3)

$$y(x) = \sqrt{4 - e^{x^2}} \quad \text{SU } (-\sqrt{\ln 4}, \sqrt{\ln 4})$$

ANALOGAMENTE LA SOLUZIONE T.C. $y(0) = \sqrt{5}$ È

(4)

$$y(x) = \sqrt{4 + e^{x^2}} \quad \text{SU } \mathbb{R}$$

QUELLA T.C. $y(0) = -\sqrt{3}$ È:

(5)

$$y(x) = -\sqrt{4 - e^{x^2}} \quad \text{SU } (-\sqrt{\ln 4}, \sqrt{\ln 4})$$

E QUELLA T.C. $y(0) = -\sqrt{5}$ È:

(6)

$$y(x) = -\sqrt{4 + e^{x^2}} \quad \text{SU } \mathbb{R}$$

PER CIASCUNA DELLE 4 SOL. TROVATE, VISTO CHE NON ABBIAMO CONTROLLATO CHE TUTTI I PASSAGGI FOSSERO DELLE EQUIVALENZE, DOBBIAMO FARE LA VERIFICA PER ACCERTARCI CHE SIAMO DAVVERO SOLUZIONI E POI INVOCARE IL TEQ. DI ES E UNICITÀ PER DIMOSTRARE CHE NON CENE SONO ALTRE.

AD ESEMPIO, PER LA (3) SI HA:

$$y'(x) = \left(\sqrt{4 - e^{x^2}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{4 - e^{x^2}}} \cdot (-e^{x^2}) \cdot 2x = \frac{-e^{x^2}}{\sqrt{4 - e^{x^2}}} \cdot x$$

$$\frac{(y(x))^2 - 4}{y(x)} \cdot x = \frac{4 - e^{x^2} - 4}{\sqrt{4 - e^{x^2}}} \cdot x = \frac{-e^{x^2}}{\sqrt{4 - e^{x^2}}} \cdot x$$

QUINDI L'EQUAZIONE (1) È SODDISFATTA.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

DEF. 1

UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DI ORDINE n È UN'EQUAZIONE DEL TIPO

(7)

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x)$$

DOVE $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x) \in C((a, b))$ E $a_n(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.

INOLTRE, SE $b(x)$ È IDENTICAMENTE NULLA, L'EQUAZIONE SI DICE OMOGENEA,

ALTRIMENTI SI DICE NON OMOGENEA. IN PARTICOLARE, DATA UN'EQUAZIONE DI TIPO (7) NON OMOGENEA, L'EQUAZIONE OMOGENEA CHE HA IL SUO STESSO PRIMO MEMBRO È DETTA OMOGENEA A LEI ASSOCIATA.

OSS. 2

SE INDICHIAMO CON $\mathcal{L}$ L'OPERATORE.

$$\mathcal{L} : C^n((a, b)) \rightarrow C((a, b))$$

$$y(x) \mapsto a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x)$$

L'EQUAZIONE (7) PUÒ SCRIVERSI:

$$\mathcal{L}(y) = b(x)$$

IL TERMINE "EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE" DERIVA APPUNTO DAL FATTO CHE $\mathcal{L}$ È LINEARE.

INFATTI, $\forall y_1(x), y_2(x) \in C^n((a, b))$ E $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = a_n(x) \cdot (\alpha y_1(x) + \beta y_2(x))^{(n)} + \dots + a_1(x) \cdot (\alpha y_1(x) + \beta y_2(x))' + a_0(x) \cdot (\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) =$$

$$\begin{aligned}
&= a_n(x) \cdot \left(\alpha y_1^{(n)}(x) + \beta y_2^{(n)}(x) \right) + \dots + a_1(x) \cdot \left(\alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) \right) + a_0(x) \left(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \right) = \\
&= \alpha \left(a_n(x) y_1^{(n)}(x) + \dots + a_1(x) y_1'(x) + a_0(x) y_1(x) \right) + \beta \left(a_n(x) y_2^{(n)}(x) + \dots + a_1(x) y_2'(x) + a_0(x) y_2(x) \right) = \\
&= \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2)
\end{aligned}$$

TEO.1 (ESISTENZA E UNICITÀ PER EQ. LINEARI)

DATO IL PROB. DI CAUCHY

$$(8) \quad \begin{cases} a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

DOVE $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x) \in C((a,b))$, CON $a_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$, E INOLTRE $x_0 \in (a,b)$ E $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

ALLORA $\exists!$ $y \in C^n((a,b))$ CHE È SOLUZIONE DI (8).

OSS.3

IL TEO.1 È UN CASO PARTICOLARE DI UN TEO. PIÙ GENERALE CHE VERRÀ DIMOSTRATO NEL CORSO DI ANALISI 4, PER CUI NE OMETTIAMO LA DIMOSTRAZIONE.

TEO.2

DATI $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x) \in C((a,b))$, SI CONSIDERI L'EQUAZIONE

$$(9) \quad a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$

E SIA

$$S = \{ y \in C^n((a,b)) \mid y(x) \text{ È SOLUZIONE DI (9)} \}$$

ALLORA S È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n DI $C^n((a,b))$.

DIMO

SAPPIAMO GIÀ (VEDI OSS.2) CHE L'OPERATORE $\mathcal{L}$ DEFINITO DA:

$$\mathcal{L} : C^n((a,b)) \rightarrow C((a,b))$$

$$Y(x) \mapsto \alpha_n(x) Y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x) Y^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_1(x) Y'(x) + \alpha_0(x) Y(x)$$

È LINEARE.

SI NOTI CHE L'EQUAZIONE (9) PUÒ ESSERE RISCritTA:

$$\mathcal{L}(Y) = 0$$

QUINDI $\mathcal{S}$ È AUTOMATICAMENTE UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $C^n((a,b))$

PERCHÈ È IL NUCLEO DI $\mathcal{L}$. RIMANE DA DIMOSTRARE CHE $\dim(\mathcal{S}) = n$.

A TALE SCOPO BASTERÀ ESIBIRE UNA BASE DI $\mathcal{S}$ COSTITUITA DA n ELEMENTI.

DUNQUE, PRESO $x_0 \in (a,b)$, PER OGNI $k=0,1,\dots,n-1$ DEFINIAMO $Y_k(x)$ COME LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(Y) = 0 \\ (Y(x_0), Y'(x_0), \dots, Y^{(k-1)}(x_0), Y^{(k)}(x_0), Y^{(k+1)}(x_0), \dots, Y^{(n-1)}(x_0)) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

k-ESIMO, PARTENDO DA ZERO

GRAZIE AL TEO.1, TALI $Y_k(x)$ ESISTONO E STANNO IN $C^n((a,b))$ E QUINDI, SICCOME SODDISFANO L'EQUAZIONE $\mathcal{L}(Y) = 0$, SI HA $Y_k(x) \in \mathcal{S}$, PER OGNI $k=0,1,\dots,n-1$.

DETTO $\mathcal{B} = \{Y_0(x), Y_1(x), \dots, Y_{n-1}(x)\}$, VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\mathcal{B}$ È UNA BASE.

PER PRIMA COSA DIMOSTRIAMO CHE GLI $Y_k(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

SE PER ASSURDO COSÌ NON FOSSE, CI SAREBBE $k \in 0,1,\dots,n-1$ TALE CHE:

$$Y_k(x) = \alpha_1 Y_1(x) + \dots + \alpha_{k-1} Y_{k-1}(x) + \alpha_{k+1} Y_{k+1}(x) + \dots + \alpha_{n-1} Y_{n-1}(x)$$

MA ALLORA, DERIVANDO k VOLTE IN AMBDO I MEMBRI E VALUTANDO L'UGUAGLIANZA IN x_0 , SI AVREBBE:

$$\begin{aligned} Y_k^{(k)}(x_0) &= \alpha_1 Y_1^{(k)}(x_0) + \dots + \alpha_{k-1} Y_{k-1}^{(k)}(x_0) + \alpha_{k+1} Y_{k+1}^{(k)}(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} Y_{n-1}^{(k)}(x_0) = \\ &= \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot 0 + \alpha_{k+1} \cdot 0 + \dots + \alpha_{n-1} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $Y_k^{(k)}(x_0) = 1$.

QUESTO DIMOSTRA CHE GLI ELEMENTI DI $\mathcal{B}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

MOSTRIAMO CHE $\mathcal{B}$ GENERA.

A TALE SCOPO, PRESO UN QUALISIASI $y(x) \in \mathcal{S}$, PER OGNI $k=0,1,\dots,n-1$ PONIAMO:

$$\beta_k = y^{(k)}(x_0).$$

MA ALLORA $y(x)$ È SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY:

$$(10) \quad \begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0 \\ (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \end{cases}$$

SI NOTI PERÒ CHE È SOLUZIONE DI (10) ANCHE LA SEGUENTE COMB. LINEARE DI ELEMENTI DI $\mathcal{B}$:

$$\beta_0 y_0(x) + \beta_1 y_1(x) + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}(x).$$

MA SICCOME LA SOLUZIONE DI (10) È UNICA, DEVE ESSERE:

$$y(x) = \beta_0 y_0(x) + \beta_1 y_1(x) + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}(x)$$

CIOÈ $y(x)$ È COMB. LINEARE DI ELEMENTI DI $\mathcal{B}$.

QUINDI $\mathcal{B}$ GENERA $\mathcal{S}$. CIÒ CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE.

OSS. 4

IL TEO. 2 CI GARANTISCE CHE PER TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI (9) BASTA TROVARNE

n INDIPENDENTI: $v_1(x), \dots, v_n(x)$. INFATTI TUTTE LE ALTRE SOLUZIONI SARANNO DEL TIPO:

$$y(x) = \alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_n v_n(x)$$

TEO. 3

DATI $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x) \in C((a,b))$, SI CONSIDERI L'EQUAZIONE

$$(11) \quad a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x)$$

ALLORA LA SOL. GENERALE DI (11) È DATA DA:

$$(12) \quad y(x) = y_0(x) + \alpha_1 v_1(x) + \alpha_2 v_2(x) + \dots + \alpha_n v_n(x)$$

DOVE $y_0(x) \in C^{\infty}((a,b))$ È UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI (11), MENTRE

$\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ È UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOL. DELLA OMOGENEA ASSOCIATA A (11).

DIMO

PER COMODITÀ INDICHIAMO, COME AL SOLITO, CON $\mathcal{L}$ L'OPERATORE LINEARE CHE TROVIAMO APPLICATO AL 1° MEMBRO DELLA (11).

IN TAL MODO LA (11) PUÒ ESSERE RISCritta COME:

$$(13) \quad \mathcal{L}(y) = b(x)$$

E LA SUA OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$(14) \quad \mathcal{L}(y) = 0$$

OSSERVIAMO CHE OGNI $y(x)$ DELLA FORMA (12) È SOLUZIONE DI (13) PERCHÈ:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y(x)) &= \mathcal{L}(y_0(x) + \alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_n v_n(x)) = \\ &= \mathcal{L}(y_0(x) + \alpha_1 \mathcal{L}(v_1(x)) + \dots + \alpha_n \mathcal{L}(v_n(x))) = \\ &= b(x) + \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = b(x) \end{aligned}$$

VICEVERSA, OGNI $\tilde{y}(x)$ CHE SIA SOLUZIONE (13) DEVE ESSERE DELLA FORMA (12), PERCHÈ, SICCOME ANCHE $y_0(x)$ SODDISFA (13) SI HA:

$$\mathcal{L}(\tilde{y}(x) - y_0(x)) = \mathcal{L}(\tilde{y}(x)) - \mathcal{L}(y_0(x)) = b(x) - b(x) = 0$$

QUINDI $\tilde{y}(x) - y_0(x)$ È SOLUZIONE DI (14) E QUINDI, ESSENDO $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$

UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI (14), SI OTTIENE CHE $\tilde{y}(x) - y_0(x)$ È DELLA FORMA:

$$\tilde{y}(x) - y_0(x) = \beta_1 v_1(x) + \dots + \beta_n v_n(x)$$

CIOÈ:

$$\tilde{y}(x) = y_0(x) + \beta_1 v_1(x) + \dots + \beta_n v_n(x)$$

QUINDI LE SOLUZIONI DI (13), CIOÈ QUELLE DI (11), SONO TUTTE E SOLE QUELLE DELLA FORMA (12).

OSS.5

GRAZIE AL TEO.3, PER TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$, BASTA

TROVARNE UNA SOLA (A CONDIZIONE CHE SI SAPPIA RISOLVERE L'OMOGENEA ASSOCIATA).

NEGLI ESEMPI CHE SEGUONO VEDIAMO UN PO' DI CASI IN CUI SI RIESCE A TROVARE ESPLICITAMENTE LA SOLUZIONE.

ES. 2

TROVARE TUTTE LE $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$ CHE SODDISFANO L'EQ. DIFF.

(15)

$$y' + \cos x \cdot y = \cos x \sin x$$

SVOLGIMENTO

RISOLVIAMO PRIMA L'OMOGENEA ASSOCIATA:

(16)

$$y' + \cos x \cdot y = 0$$

SICCOME È DI ORDINE 1, LO SPAZIO $\mathcal{S}$ DELLE SOLUZIONI HA DIMENSIONE 1, QUINDI BASTA TROVARE UNA SOLUZIONE $v(x)$ DI (16) CHE NON SIA IDENTICAMENTE NULLA, PER AVERE UNA BASE DI $\mathcal{S}$.

PER TROVARE $v(x)$ SI OSSERVI CHE (16) È A VARIABILI SEPARABILI (TUTTE LE LINEARI OMOGENEE DI ORDINE 1 LO SONO!). SI HA:

$$v'(x) + \cos x \cdot v(x) = 0$$

CHE, SE $v(x) \neq 0$, EQUIVALE A:

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = -\cos x$$

CIOÈ:

$$\left(\ln |v(x)| \right)' = (-\sin x)'$$

CIOÈ:

$$\ln |v(x)| = -\sin x + C$$

SICCOME CI BASTA UNA SOLA $v(x)$ NON IDENTICAMENTE NULLA SCEGLIAMO QUELLA TALE CHE:

$$\ln v(x) = -\sin x$$

CIOÈ:

$$v(x) = e^{-\sin x}$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE, EFFETTIVAMENTE, VERIFICA (16).

QUINDI L'INSIEME COSTITUITO DALLA SOLA $v(x)$ È UNA BASE PER $\mathcal{S}$, OVVERO LE SOL. DI (16) SONO TUTTE E SOLE QUELLE DEL TIPO:

(17)

$$y(x) = \alpha e^{-\sin x} \quad \text{CON } \alpha \in \mathbb{R}$$

PER CONCLUDERE CI BASTA TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $y_0(x)$ DI (15), IN MODO DA POTER APPLICARE IL TED. 3, OTTENENDO CHE LE SOL. DI (15) SONO TUTTE E SOLE QUELLE DEL TIPO

$$y(x) = y_0(x) + \alpha e^{-\sin x} \quad \text{CON } \alpha \in \mathbb{R}$$

UN METODO STANDARD PER TROVARE $y_0(x)$ È IL COSIDETTO "METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI", CHE CONSISTE NEL PRENDERE LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA, CIOÈ LA (17), E CERCARE $y_0(x)$ TRA LE FUNZIONI DEL TIPO

$$(18) \quad y_0(x) = \alpha(x) e^{-\sin x}$$

CIOÈ CHE SI OTTENGONO DALLA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA, TRASFORMANDO LE COSTANTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE IN FUNZIONI.

CI CHIEDIAMO QUINDI COME SCEGLIERE $\alpha(x)$ NELLA (18), IN MODO CHE $y_0(x)$ SIA SOL. DI (15). PER SCOPRILO, SOSTITUIAMO (18) IN (15), OTTENENDO:

$$\left(\alpha(x) e^{-\sin x} \right)' + \cos x \cdot \left(\alpha(x) e^{-\sin x} \right) = \cos x \sin x$$

CIOÈ:

$$\alpha'(x) e^{-\sin x} + \cancel{\alpha(x) \cdot (-\cos x) e^{-\sin x}} + \cancel{\cos x \cdot \alpha(x) e^{-\sin x}} = \cos x \sin x$$

CIOÈ:

$$\alpha'(x) = \cos x \sin x e^{\sin x}$$

QUINDI BASTA PRENDERE:

$$\alpha(x) = \int \cos x \sin x e^{\sin x} dx \stackrel{u = \sin x}{=} \int u e^u du = \dots = (u-1)e^u = (\sin x - 1)e^{\sin x}$$

CON TALE $\alpha(x)$ LA (18) È SOLUZIONE DI (15).

QUINDI UNA SOL. PARTICOLARE DI (15) È:

$$y_0(x) = \alpha(x) e^{-\sin x} = (\sin x - 1) e^{\sin x} \cdot e^{-\sin x} = \sin x - 1$$

A QUESTO PUNTO, GRAZIE AL TEO. 3, POSSO DIRE CHE LE SOL DI (15) SONO TUTTE E SOLE LE $y(x)$ DELLA FORMA:

$$y(x) = (\sin x - 1) + \alpha e^{-\sin x} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

oss.6

SE L'EQUAZIONE LINEARE DA RISOLVERE È DI ORDINE 1, IL PROCEDIMENTO UTILIZZATO NELL' ES.2 FUNZIONA SEMPRE (A CONDIZIONE CHE SI POSSANO CALCOLARE LE PRIMITIVE DELLE FUNZIONI CHE SI OTTENGONO). RACCOGLIAMO QUESTO FATTO NEI SEGUENTI TEOREMI.

TEO. 4 SE $Q(x) \in C((a,b))$, LA SOLUZIONE GENERALE DI:

$$y' + Q(x)y = 0$$

È:

(19) $y(x) = \alpha e^{-A(x)} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

DOVE $A(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $Q(x)$.

DIMO

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE $y(x) = e^{-A(x)}$ È SOLUZIONE, DOPODI CHE IL TEO. 2 GARANTISCE CHE LE (19) SONO TUTTE LE SOLUZIONI.

TEO. 5 SE $Q(x), b(x) \in C((a,b))$, UNA SOL. PARTICOLARE DI:

(20) $y' + Q(x)y = b(x)$

È DATA DA:

(21) $y_0(x) = \alpha(x) e^{-A(x)}$

DOVE $A(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $Q(x)$ E $\alpha(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $b(x) e^{A(x)}$.

DIMO

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE $y_0(x)$ È SOLUZIONE PERCHÈ SOSTITUENDO (21) IN (20) SI HA:

$$\begin{aligned} & (\alpha(x) \cdot e^{-A(x)})' + Q(x) \cdot \alpha(x) e^{-A(x)} = \\ & = \alpha'(x) \cdot e^{-A(x)} + \alpha(x) \cdot (-A(x))' e^{-A(x)} + Q(x) \cdot \alpha(x) e^{-A(x)} = \\ & = b(x) e^{A(x)} \cdot e^{-A(x)} + \cancel{\alpha(x) \cdot (-Q(x)) e^{-A(x)}} + \cancel{Q(x) \cdot \alpha(x) e^{-A(x)}} = \\ & = b(x) \end{aligned}$$

OSS. 1 ANZICHÈ UTILIZZARE DIRETTAMENTE IL TEO. 5 PER TROVARE $y_0(x)$ È PIÙ FACILE RICORDARE CHE VA CERCATA UNA SOL. DEL TIPO $y_0(x) = \alpha(x) e^{-A(x)}$, CON $A(x)$ PRIMITIVA DI $Q(x)$. PER TROVARE $\alpha(x)$ SENZA DOVERLO RICORDARE INFATTI BASTA SOSTITUIRE NELL'EQUAZIONE, OTTENENDO.

$$(\alpha(x) e^{-A(x)})' + Q(x) \cdot \alpha(x) e^{-A(x)} = b(x)$$

CIOÈ

$$\alpha'(x) e^{-A(x)} + \cancel{\alpha(x) \cdot (-Q(x)) e^{-A(x)}} + \cancel{Q(x) \cdot \alpha(x) e^{-A(x)}} = b(x)$$

DA CUI SEGUE APPUNTO:

$$\alpha'(x) = b(x) e^{A(x)}$$