13 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (...CONTINUA...)

TEO. 1

DATA L'EQ. DIFF.

(1) $$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

CON $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x) \in C((a,b))$.

SIANO INOLTRE $v_1(x), \dots, v_n(x) \in C^n((a,b))$ n SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE, A PARTIRE DALLE QUALI DEFINIAMO LA MATRICE:

(2) $$W(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) & \dots & v_n(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) & \dots & v_n'(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(x) & v_2^{(n-1)}(x) & \dots & v_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

ALLORA SONO TRA LORO EQUIVALENTI LE AFFERMAZIONI:

(a) $v_1(x), \dots, v_n(x)$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

(b) $\forall x \in (a,b)$ $\det(W(x)) = 0$

(c) $\exists x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $\det(W(x_0)) = 0$

INOLTRE SONO EQUIVALENTI TRA LORO LE AFFERMAZIONI

(A) $v_1(x), \dots, v_n(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

(B) $\forall x \in (a,b)$ $\det(W(x)) \neq 0$

(C) $\exists x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $\det(W(x_0)) \neq 0$

DIMO

(a)⇒(b) SE VALE (a) ALLORA $\exists^{ne}$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, NON TUTTI NULLI TALI CHE

$$y(x) = \alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_n v_n(x)$$

È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA.

MA ALLORA SONO IDENTICAMENTE NULLE ANCHE TUTTE LE SUE DERIVATE; QUINDI $\forall x \in (a,b)$ SI HA:

$$\begin{cases} \alpha_1 v_1(x) + \cdots + \alpha_n v_n(x) = 0 \\ \alpha_1 v_1'(x) + \cdots + \alpha_n v_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 v_1^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n v_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

CIOÈ

(3) $$W(x) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI, $\forall x \in (a,b)$ IL SISTEMA LINEARE **(3)** HA UNA SOL. NON IDENTICAMENTE NULLA, DA CUI SEGUE CHE $\forall x \in (a,b)$ $\det(W(x)) = 0$, CIOÈ **(b)**.

(b)⇒(c) È OVVIO.

(c)⇒(a) SE PER $x_0 \in (a,b)$ SI HA $\det W(x_0) = 0$ ALLORA $\exists\, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, CON $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq \overline{0}$, TALE CHE:

$$W(x_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

CIOÈ TALE CHE:

$$\begin{cases} \alpha_1 v_1(x_0) + \cdots + \alpha_n v_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 v_1'(x_0) + \cdots + \alpha_n v_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 v_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \alpha_n v_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

CIÒ SIGNIFICA CHE LA FUNZIONE:

$$Y(x) = \alpha_1 v_1(x) + \cdots + \alpha_n v_n(x)$$

SODDISFA LE CONDIZIONI:

$$Y(x_0) = 0, \; Y'(x_0) = 0, \dots, \; Y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

MA SICCOME È ANCHE SOL. DI **(1)** (PERCHÉ LO SONO TUTTE LE $v_i(x)$) PER IL TEO. DI UNICITÀ DEVE COINCIDERE CON LA SOLUZIONE IDENTICAMENTE NULLA.

QUINDI $\forall x \in (a,b)$ SI HA:

$$Y(x) = 0$$

CIOÈ

$$\alpha_1 v_1(x) + \cdots + \alpha_n v_n(x) = 0$$

IL FATTO CHE ESISTA UNA COMB. LINEARE DELLE $v_1(x), \dots, v_n(x)$, A COEFFICIENTI NON TUTTI NULLI, CHE È UGUALE ALLA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA, SIGNIFICA CHE LE $v_1(x), \dots, v_n(x)$ SONO DIPENDENTI, CIOÈ CHE VALE (a).

(A)⇔(B)⇔(C)

BASTA OSSERVARE CHE:

(A) È LA NEGAZIONE DI (a)

(B) È LA NEGAZIONE DI (c)

(C) È LA NEGAZIONE DI (b)

OSS. 1

LA MATRICE (2) PRENDE IL NOME DI MATRICE WRONSKIANA DI $v_1(x), \dots, v_n(x)$, MENTRE IL SUO DETERMINANTE È DETTO DETERMINANTE WRONSKIANO.

TEO. 2 (METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI)

DATA L'EQ. DIFF.

(4) $$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

CON $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), b(x) \in C((a,b))$

SIANO INOLTRE $v_1(x), \dots, v_n(x) \in C^n((a,b))$ UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA ASSOCIATA A (4).

ALLORE ESISTE UNA SOL. PARTICOLARE $y_0(x)$ DI (4) DELLA FORMA:

(5) $$y_0(x) = \alpha_1(x)v_1(x) + \dots + \alpha_n(x)v_n(x)$$

DOVE $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ SODDISFANO:

(6) $$W(x) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1'(x) \\ \vdots \\ \alpha_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

DOVE $W(x)$ È LA MATRICE WRONSKIANA DELLE $v_1(x), \dots, v_n(x)$.

DIMO

CERCHIAMO UNA SOL. DI (4) DELLA FORMA (5).

PER COMODITÀ INDICHIAMO CON $\alpha(x)$ E $v(x)$ I VETTORI:

$$\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$$

E

$$v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$$

COSICCHÉ LA (5) PUÒ RISCRIVERSI:

(7)
$$Y_0(x) = \langle \alpha(x), v(x) \rangle$$

DOBBIAMO QUINDI TROVARE $\alpha(x)$ IN MODO CHE CALCOLANDO TUTTE LE DERIVATE DI $Y_0(x)$ FINO ALLA $(n-1)$ESIMA E SOSTITUENDO IN (6), LA SODDISFI.

SI NOTI CHE:

$$Y_0'(x) = \left(\langle \alpha(x), v(x) \rangle \right)' = \left(\alpha_1(x) v_1(x) + \dots + \alpha_n(x) v_n(x) \right)' =$$

$$= \alpha_1'(x) v_1(x) + \dots + \alpha_n'(x) v_n(x) + \alpha_1(x) v_1'(x) + \dots + \alpha_n(x) v_n'(x) =$$

$$= \langle \alpha'(x), v(x) \rangle + \langle \alpha(x), v'(x) \rangle$$

ORA, VISTO CHE NON CI INTERESSA TROVARE TUTTI I POSSIBILI $\alpha(x)$, MA SOLO UNO, DECIDIAMO DI TROVARE QUELLI CHE SODDISFANO LA CONDIZIONE AGGIUNTIVA

(8)
$$\langle \alpha'(x), v(x) \rangle = 0$$

COSICHÉ SI OTTIENE:

(9)
$$Y_0'(x) = \langle \alpha(x), v'(x) \rangle$$

A QUESTO PUNTO, DERIVANDO (9) SI OTTIENE:

$$Y_0''(x) = \langle \alpha'(x), v'(x) \rangle + \langle \alpha(x), v''(x) \rangle$$

QUINDI, IMPONENDO LA CONDIZIONE AGGIUNTIVA

(10)
$$\langle \alpha'(x), v'(x) \rangle = 0$$

OTTENGO

(11)
$$Y_0''(x) = \langle \alpha(x), v''(x) \rangle$$

PROSEGUENDO NELLA STESSA MANIERA FINO $Y_0^{(n-1)}(x)$, SI OTTIENE CHE SE $\alpha(x)$ SODDISFA LE CONDIZIONI

(12)
$$\begin{cases} \langle \alpha'(x), v(x)\rangle = 0 \\ \langle \alpha'(x), v'(x)\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \alpha'(x), v^{(n-2)}(x)\rangle = 0 \end{cases}$$

ALLORA LE DERIVATE DI $y_0(x) = \langle \alpha(x), v(x)\rangle$ SONO:

(13)
$$\begin{aligned} y_0'(x) &= \langle \alpha(x), v'(x)\rangle \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= \langle \alpha(x), v^{(n-1)}(x)\rangle \end{aligned}$$

QUINDI UNA FUNZIONE DEL TIPO:

$$y_0(x) = \langle \alpha(x), v(x)\rangle$$

CON $\alpha(x)$ CHE SODDISFI (12), SODDISFA L'EQUAZIONE (4) SE E SOLO SE:

$$\left(\langle \alpha(x), v^{(n-1)}(x)\rangle\right)' + a_{n-1}(x)\langle \alpha(x), v^{(n-1)}(x)\rangle + \dots + a_1(x)\langle \alpha(x), v'(x)\rangle + a_0(x)\langle \alpha(x), v(x)\rangle = b(x)$$

CIOÈ:

$$\langle \alpha'(x), v^{(n-1)}(x)\rangle + \langle \alpha(x), v^{(n)}(x)\rangle + a_{n-1}(x)\langle \alpha(x), v^{(n-1)}(x)\rangle + \dots + a_1(x)\langle \alpha(x), v'(x)\rangle + a_0(x)\langle \alpha(x), v(x)\rangle = b(x)$$

CIOÈ

$$\langle \alpha'(x), v^{(n-1)}(x)\rangle + \underbrace{\langle \alpha(x), v^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)v^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)v'(x) + a_0(x)v(x)\rangle}_{=0} = b(x)$$

PERCHÉ TUTTE LE COMPONENTI DI $v(x)$ SODDISFANO L'OMOGENEA ASSOCIATA

CIOÈ

(14)
$$\langle \alpha'(x), v^{(n-1)}(x)\rangle = b(x)$$

QUINDI, CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHÉ $y_0(x) = \langle \alpha(x), v(x)\rangle$ SODDISFI L'EQUAZIONE (4) È CHE $\alpha(x)$ SODDISFI (12) E (14), CIOÈ CHE SI ABBIA:

$$\begin{cases} \langle \alpha'(x), v(x)\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \alpha'(x), v^{(n-2)}(x)\rangle = 0 \\ \langle \alpha'(x), v^{(n-1)}(x)\rangle = b(x) \end{cases}$$

CIOÈ:

$$W(x)\cdot \alpha'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

TALE SISTEMA HA CERTAMENTE UNA SOLUZIONE PERCHÈ $v_1(x), \dots, v_n(x)$ SONO INDIPENDENTI E QUINDI $\det(W(x)) \neq 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$.

ES. 1 RISOLVERE $\quad y'' - y = \frac{1}{e^{2x}+1}$

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$ L'OMOGENEA ASSOCIATA È

$$y'' - y = 0$$

IL CUI POL. CARATTERISTICO È $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, CON RADICI $\lambda = 1$ E $\lambda = -1$.

QUINDI LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA È

$$y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$$

CERCHIAMO ORA UNA SOL PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA DEL TIPO:

$$y_0(x) = \alpha(x) e^{x} + \beta(x) e^{-x}.$$

PER IL TEO. 2 BASTA SCEGLIERE $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ IN MODO CHE:

$$W(x) \begin{pmatrix} \alpha'(x) \\ \beta'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{e^{2x}+1} \end{pmatrix}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} e^{x} \alpha'(x) + e^{-x} \beta'(x) = 0 \\ e^{x} \alpha'(x) - e^{-x} \beta'(x) = \frac{1}{e^{2x}+1} \end{cases}$$

DA CUI SEGUE:

$$\begin{cases} \alpha'(x) = \frac{1}{2e^{x}(e^{2x}+1)} \\ \beta'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{x}}{e^{2x}+1} \end{cases}$$

$$\alpha(x) = \int \frac{1}{2e^{x}(e^{2x}+1)}\,dx \overset{x = \ln t}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t(t^2+1)} \cdot \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2-t^2}{t^2(t^2+1)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t} - \arctan t \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} \arctan(e^{x})$$

QUINDI UNA SCELTA POSSIBILE È:

$$\begin{cases} \alpha(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} \arctan(e^{x}) \\ \beta(x) = -\frac{1}{2} \arctan(e^{x}) \end{cases}$$

QUINDI:

$$y_0(x) = \left(-\frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} \arctan e^{x} \right) e^{x} - \frac{1}{2} \arctan(e^{x}) \cdot e^{-x}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \arctan e^{x}$$

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = -\frac{1}{2} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \arctan e^{x} + \alpha e^{x} + \beta e^{-x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
