

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI (...CONTINUA...)

ES.1 DATA $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

MOSTRARE CHE f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ E CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ PER $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

FARE LO STESSO NEL PUNTO $(2,1)$ E SCRIVERE L'EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE IN $(2,1)$.

SVOLGIMENTO

SAPPIAMO CHE NELLA DEF. DI DIFFERENZIABILITÀ I COEFF. DELLA PARTE LINEARE SONO NECESSARIAMENTE $\nabla f(x_0, y_0)$,

QUINDI TROVIAMO $\nabla f(0,0)$ E VEDIAMO DIRETTAMENTE SE VALE 0 IL LIMITE

(1)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0) \cdot x - f_y(0,0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

IL MODO PIÙ RAPIDO DI CALCOLARE $f_x(0,0)$ È QUELLO DI OSSERVARE CHE $f(x,0)$ È IDENTICAMENTE NULLA E QUINDI, POSTO $g(x) = f(x,0)$, SI HA:

$$f_x(0,0) = g'(0) = 0$$

ANALOGAMENTE $f_y(0,0) = 0$ PERCHÉ $f(0,y)$ È IDENTICAMENTE NULLA.

SICCOME POI, PER DEFINIZIONE, ANCHE $f(0,0) = 0$, IL LIMITE (1) DIVENTA:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{0 \leq \dots \leq 1} \cdot \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{|y| \leq 1} \cdot \underbrace{y}_{\downarrow 0} \right) = 0 \end{aligned}$$

PERCHÉ PRODOTTO TRA FUNZIONI LIMITATE È UNA FUNZIONE INFINITESIMA

QUINDI f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

GRAZIE A CIÒ VALE LA FORMULA:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v \rangle = f_x(0,0) \cdot v_1 + f_y(0,0) \cdot v_2 = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

VEDIAMO ORA NEL PUNTO $(1,2)$.

PER $(x,y) \neq (0,0)$ SI HA:

$$f_x(x,y) = \left(\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right)_x = \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - x^2 y^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^2(x^2 + y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \left(\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right)_y = \dots = \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

QUINDI

$$f_x(1,2) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2^4}{(1^2 + 2^2)^2} = \frac{32}{25}$$

$$f_y(1,2) = \frac{2 \cdot 1^4 \cdot 2}{(1^2 + 2^2)^2} = \frac{4}{25}$$

VERIFICHIAMO LA DIFFERENZIABILITÀ, CIOÈ SE VALE ZERO IL LIMITE:

(2)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{f(x,y) - f(1,2) - f_x(1,2)(x-1) - f_y(1,2)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4}{5} - \frac{32}{25}(x-1) - \frac{4}{25}(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} =$$

$$= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{(u+1)^2 \cdot (v+2)^2}{(u+1)^2 + (v+2)^2} - \frac{4}{5} - \frac{32}{25}u - \frac{4}{25}v}{\sqrt{u^2 + v^2}} =$$

$$= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{25 \left[(u+1)^2 \cdot (v+2)^2 \right] - 4(5 + 8u + v) \left[(u+1)^2 + (v+2)^2 \right]}{\left[(u+1)^2 + (v+2)^2 \right] \cdot \sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{25(4 + 8u + 4v) - 4(5 + 8u + v)(5 + 2u + 4v) + o(\sqrt{u^2 + v^2})}{\left[(u+1)^2 + (v+2)^2 \right] \sqrt{u^2 + v^2}} =$$

$$= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{25(\cancel{4} + 8\cancel{u} + \cancel{4}v) - 4(\cancel{25} + \cancel{40}u + \cancel{5}v + \cancel{10}u + \cancel{20}v) + o(\sqrt{u^2 + v^2})}{\left[(u+1)^2 + (v+2)^2 \right] \sqrt{u^2 + v^2}} =$$

$$= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{(u+1)^2 + (v+2)^2} \cdot \frac{o(\sqrt{u^2 + v^2})}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{1^2 + 2^2} \cdot 0 = 0$$

TRA POCO FAREMO UN
TEOREMA CHE CI DARÀ
LA DIFFERENZIABILITÀ
SENZA BISOGNO DI TUTTI
QUESTI CALCOLI.

$$\begin{aligned} ((u+1)(v+2))^2 &= (2 + 2u + v + o(\sqrt{u^2 + v^2}))^2 \\ &= 4 + 8u + 4v + o(\sqrt{u^2 + v^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u+1)^2 + (v+2)^2 &= \\ &= 1 + 2u + 4 + 4v + o(\sqrt{u^2 + v^2}) \end{aligned}$$

QUINDI f È DIFFERENZIABILE ANCHE IN $(1,2)$ E IL PIANO TANGENTE NEL PUNTO $(1,2, f(1,2))$

HA EQUAZIONE:

$$Z = f(1,2) + f_x(1,2) \cdot (x-1) + f_y(1,2) \cdot (y-2)$$

CIOÈ:

$$z = \frac{4}{5} + \frac{32}{25}(x-1) + \frac{4}{25}(y-2)$$

INFINE, ESSENDO DIFFERENZIABILE, PER CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2)$, VALE LA FORMULA:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \langle \nabla f(1,2), v \rangle = f_x(1,2) \cdot v_1 + f_y(1,2) \cdot v_2 = \frac{32}{25} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{18}{25} \sqrt{2}$$

ES.2 DATA $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ PER $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ E DIRE SE f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

SVOLGIMENTO

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t v_1, t v_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{(t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})^3 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^3 \cdot \frac{1}{2} + t^3 \cdot \frac{1}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

SI NOTI PERÒ CHE $f(x,0)$ E $f(0,y)$ SONO IDENTICAMENTE NULLE QUINDI $f_x(0,0) = 0$ E $f_y(0,0) = 0$.

QUINDI f NON PUÒ ESSERE DIFFERENZIABILE PERCHÉ, SE LO FOSSE, DOVREBBE ESSERE:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$$

MENTRE INVECE $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$.

TEO.1 (TEO. DEL DIFFERENZIALE TOTALE)

DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, DERIVABILE SU TUTTO Ω , SE INOLTRE LE DERIVATE PARZIALI $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ SONO TUTTE CONTINUE IN $\bar{x}$, ALLORA f È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$.

DIMO

FAREMO LA DIMOSTRAZIONE NEL CASO $n=2$; L'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE È POI ESPORTABILE AL CASO GENERALE.

SUPPONIAMO QUINDI $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ APERTO, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ E CHE f_x ED f_y ESISTANO SU TUTTO Ω E SIANO CONTINUE IN $(\bar{x}, \bar{y})$.

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE VALE ZERO IL LIMITE:

(3)

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x}, \bar{y}) - f_x(\bar{x}, \bar{y})h - f_y(\bar{x}, \bar{y})k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE:

$$f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x}, \bar{y}+k) + f(\bar{x}, \bar{y}+k) - f(\bar{x}, \bar{y}) =$$

APPLICANDO IL TEOREMA DI LAGRANGE ALLA

FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE

$\psi(x) = f(x, \bar{y}+k)$ SULL'INTERVALLO $[\bar{x}, \bar{x}+h]$

$$= f_x(\xi, \bar{y}+k) \cdot h + f_y(\bar{x}, \mu) \cdot k$$

DOVE ξ STA TRA $\bar{x}$ E $\bar{x}+h$ E μ TRA $\bar{y}$ E $\bar{y}+k$.

QUINDI (3) DIVENTA:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f_x(\xi, \bar{y}+k) \cdot h + f_y(\bar{x}, \mu) \cdot k - f_x(\bar{x}, \bar{y})h - f_y(\bar{x}, \bar{y})k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left(\underbrace{\left(f_x(\xi, \bar{y}+k) - f_x(\bar{x}, \bar{y}) \right)}_{\text{LIMITATE}} \cdot \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{LIMITATE}} + \underbrace{\left(f_y(\bar{x}, \mu) - f_y(\bar{x}, \bar{y}) \right)}_{\text{LIMITATE}} \cdot \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{LIMITATE}} \right) = 0$$

PERCHÉ f_x E f_y SONO

CONTINUE IN $(\bar{x}, \bar{y})$ E

QUANDO $(h,k) \rightarrow (0,0)$

ANCHE $\xi \rightarrow \bar{x}$ E $\mu \rightarrow \bar{y}$

QUINDI f È DIFFERENZIABILE IN $(\bar{x}, \bar{y})$.

OSS. 1

IL TEO. 1 CI DA UN MODO PIÙ PRATICO PER VERIFICARE LA DIFFERENZIABILITÀ NEI CASI IN CUI È SEMPLICE CALCOLARE LE DERIVATE PARZIALI.

AD ESEMPIO, NELL' **ES. 1**, PER VERIFICARE LA DIFFERENZIABILITÀ IN $(1,2)$, POICHÉ SI ERA GIÀ TROVATO CHE PER $(x,y) \neq (0,0)$ SI HA:

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^6}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{E} \quad f_y(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2},$$

BASTAVA OSSERVARE CHE TALI FUNZIONI SONO CONTINUE IN $(1,2)$, SENZA BISOGNO DI CALCOLARE IL (LUNGO) LIMITE (2).

DEF. 1

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, APERTO, ED $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ DERIVABILE SU TUTTO Ω E TALE CHE LE DERIVATE PARZIALI $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ SIANO TUTTE CONTINUE SU Ω , DIREMO CHE f È DI CLASSE C^1 SU Ω E SCRIVEREMO $f \in C^1(\Omega)$.

OSS.2 NON C'E' STATO BISOGNO DI RICHIEDERE, NELLA **DEF.1**, CHE f FOSSE ANCHE CONTINUA, VISTO CHE DALLA CONTINUITA' DELLE $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ SEGUE (GRAZIE AL TEO.1) ANCHE LA DIFFERENZIABILITA' DI f E QUINDI LA SUA CONTINUITA'.

DEF.2 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, APERTO, ED $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE f_{x_i} ESISTE SU TUTTO Ω . SE ANCHE f_{x_i} E' DERIVABILE RISPETTO A x_j SU TUTTO Ω LA SUA DERIVATA $(f_{x_i})_{x_j}$ PRENDE IL NOME DI DERIVATA II DI f FATTA PRIMA RISPETTO A x_i E POI RISPETTO A x_j E SI INDICA CON $f_{x_i x_j}$.

ES.3 CALCOLARE LE DERIVATE SECONDE DI $f(x,y) = x^2 y^3$

SVOLGIMENTO

$$f_{xx}(x,y) = (x^2 y^3)_{xx} = (2xy^3)_x = 2y^3$$

$$f_{xy}(x,y) = (x^2 y^3)_{xy} = (2xy^3)_y = 6xy^2$$

$$f_{yx}(x,y) = (x^2 y^3)_{yx} = (3x^2 y^2)_x = 6xy^2$$

$$f_{yy}(x,y) = (x^2 y^3)_{yy} = (3x^2 y^2)_y = 6x^2 y$$

VEDREMO CHE SOTTO OPPORTUNE IPOTESI DI REGOLARITA' f_{xy} E f_{yx} SONO SEMPRE UGUALI

ES.4 (ESEMPIO CATTIVO)

CALCOLARE f_{xy} E f_{yx} IN $(0,0)$ DELLA FUNZIONE

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - x^3 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

CALCOLIAMO f_x .

PER $(x,y) \neq (0,0)$ SI HA:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(\frac{xy^3 - x^3 y}{x^2 + y^2} \right)_x = \frac{(y^3 - 3x^2 y)(x^2 + y^2) - (xy^3 - x^3 y) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{y^3 x^2 + y^5 - 3x^4 y - 3x^2 y^3 - 2x^2 y^3 + 2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^5 - 4x^2 y^3 - x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

INVECE IN $(0,0)$ SI HA $f_x(0,0) = 0$ VISTO CHE $f(x,0)$ E' IDENTICAMENTE NULLA.

OTTENIAMO QUINDI:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5 - 4x^2y^3 - x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ANALOGAMENTE SI OTTIENE:

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{-x^5 + 4y^2x^3 + y^4x}{(x^2+y^2)^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

QUINDI:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^5}{t^4} = 1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_y(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{-t^5}{t^4} = -1$$

QUINDI $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Oss.3 DA **ES.4** SI CAPISCE CHE NON SEMPRE $f_{xy} = f_{yx}$. UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHÉ CIÒ ACCADA È DATA DAL SEGUENTE TEOREMA:

TEO.2 (T. DI SCHWARZ)

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE ESISTANO SU TUTTO Ω

$f_{x_i x_j}$ E $f_{x_j x_i}$, DOVE i E j SONO DUE DIVERSI ELEMENTI DI $\{1, \dots, n\}$.

SE INOLTRE $f_{x_i x_j}$ E $f_{x_j x_i}$ SONO CONTINUE IN $\bar{x}$, ALLORA $f_{x_i x_j}(\bar{x}) = f_{x_j x_i}(\bar{x})$.

DIMO

ANCHE PER QUESTO TEOREMA FAREMO LA DIMOSTRAZIONE IN $\mathbb{R}^2$, POI L'IDEA SARÀ ESPORTABILE IN $\mathbb{R}^n$. SIA DUNQUE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ E SIANO f_{xy} ED f_{yx} DEFINITE SU TUTTO Ω E CONTINUE IN (x_0, y_0) .

DEFINIAMO :

$$(4) \quad R(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)}$$

FAREMO VEDERE CHE $f_{xy}(x_0, y_0)$ E $f_{yx}(x_0, y_0)$ SONO ENTRAMBE UGUALI AL LIMITE:

$$(5) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} R(x, y)$$

E QUINDI SONO UGUALI TRA LORO.

COMINCIAMO DA $f_{xy}(x_0, y_0)$. SI HA:

POSTO $\varphi(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$

DOVE y E y_0 SONO FISSATI

SI HA $\varphi'(x) = f_x(x, y) - f_x(x, y_0)$

$$f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0) = (f(x, y) - f(x, y_0)) - (f(x_0, y) - f(x_0, y_0)) =$$

APPLICANDO IL TEO. DI LAGRANGE
A $\varphi(x)$ SI TROVA CHE $\exists x_1$
TRA x E x_0 TALE CHE
VALE L'UGUAGLIANZA

$$= \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_1)(x - x_0) =$$

$$= (f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0))(x - x_0) =$$

$$= f_{xy}(x_1, y_1)(y - y_0)(x - x_0)$$

CON y_1 TRA y E y_0
GRAZIE AL T. DI LAGRANGE
APPLICATO ALLA FUNZIONE
DELLA SOLA VARIABILE y

$$f_x(x_1, y)$$

QUINDI :

$$R(x, y) = \frac{f_{xy}(x_1, y_1)(y - y_0)(x - x_0)}{(x - x_0)(y - y_0)} = f_{xy}(x_1, y_1)$$

DOVE x_1 STA TRA x E x_0 E y_1 STA TRA y E y_0 , QUINDI $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \Rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)$

DI CONSEGUENZA, GRAZIE ALLA CONTINUITÀ DI f_{xy} IN (x_0, y_0) SI HA

$$(6) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} R(x, y) = \lim_{(x_1, y_1) \rightarrow (0, 0)} f_{xy}(x_1, y_1) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI PROCEDE CON $f_{yx}(x_0, y_0)$. INFATTI SI HA:

$$f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0) = (f(x, y) - f(x_0, y)) - (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) =$$

CON y_2 TRA y E y_0 GRAZIE
AL TEO. DI LAGRANGE APPLICATO
A $\psi(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$

$$= (f_y(x, y_2) - f_y(x_0, y_2))(y - y_0) =$$

$$= f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0)$$

CON x_2 TRA x E x_0
GRAZIE AL TEO. DI
LAGRANGE APPLICATO
ALLA FUNZIONE DELLA
SOLA VARIABILE x
 $f_y(x, y_2)$

DA CUI SEGUE CHE ESISTE (x_2, y_2) CON x_2 TRA x_0 E x E y_2 TRA y_0 E y TALE CHE:

$$R(x, y) = \frac{f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)} = f_{yx}(x_2, y_2)$$

PER CUI, SEMPRE SFRUTTANDO LA CONTINUITÀ DI f_{yx} IN (x_0, y_0) , SI HA:

$$(7) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} R(x, y) = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_0, y_0)} f_{yx}(x_2, y_2) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

DA (6) E (7) SEGUE $f_{xy}(y_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

DEF. 3 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ ESISTE $f_{x_i x_j}(\bar{x})$,
DEFINIAMO MATRICE HESSIANA DI f IN $\bar{x}$, E LA INDICHIAMO CON $H_f(\bar{x})$, LA MATRICE IL CUI
ELEMENTO (i, j) -ESIMO È:

$$H_{ij} = f_{x_i x_j}(\bar{x})$$

OSS. 4 SE TUTTE LE $f_{x_i x_j}$ SONO CONTINUE IN $\bar{x}$ ALLORA, GRAZIE AL TED. DI SCHWARZ
LA MATRICE HESSIANA È SIMMETRICA.

OSS. 5 COSÌ COME LE DERIVATE SECONDE SONO STATE DEFINITE COME DERIVATE DELLE
DERIVATE PRIME, COSÌ SI POSSONO DEFINIRE RICORSIVAMENTE LE DERIVATE DI ORDINE
PIÙ ALTO. ADESEMPIO SE $f(x, y, z) = x^4 y^3 z^5 + (z^2 + 1)^y$, $f_{xxzy}(x, y, z)$ SIGNIFICA:

$$\begin{aligned} f_{xxzy}(x, y, z) &= \left(\left(\left(\left(x^4 y^3 z^5 + (z^2 + 1)^y \right)_x \right)_x \right)_z \right)_y = \\ &= \left(\left(\left(4 x^3 y^3 z^5 \right)_x \right)_z \right)_y = \left(\left(12 x^2 y^3 z^5 \right)_z \right)_y = \\ &= \left(60 x^2 y^3 z^4 \right)_y = 180 x^2 y^2 z^4 \end{aligned}$$

DEF. 4 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO ED $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, DIREMO CHE f È DI CLASSE C^k E SCRIVEREMO $f \in C^k(\Omega)$,
SE ESISTONO SU Ω TUTTE LE DERIVATE DI ORDINE k E SONO CONTINUE

Oss. 6

GRAZIE AL TEO. DEL DIFF. TOTALE, SE TUTTE LE DERIVATE DI ORDINE k SONO CONTINUE ALLORA TUTTE QUELLE DI ORDINE $k-1$ SONO DIFFERENZIABILI (E QUINDI CONTINUE).

ITERANDO IL PROCEDIMENTO SI OTTIENE CHE TUTTE LE DERIVATE DI ORDINE INFERIORE SONO CONTINUE (COMPRESA LA FUNZIONE INIZIALE)

INOLTRE, GRAZIE AL TEO. DI SCHWARZ, NON CONTA L'ORDINE DI DERIVAZIONE MA SOLO QUANTE VOLTE SI È DERIVATO RISPETTO A CIASCUNA VARIABILE.

È COMODO QUINDI USARE LA NOTAZIONE COL MULTIINDICE PER INDICARE LE VARIE DERIVATE DI f .
PIÙ PRECISAMENTE SE $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ DEFINIAMO:

$$D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \left(\partial_{x_2}^{\alpha_2} \left(\dots \left(\partial_{x_n}^{\alpha_n} f \right) \dots \right) \right)$$

DOVE $\partial_{x_i}^k f$ SIGNIFICA $\underbrace{\partial_{x_1} \partial_{x_2} \dots \partial_{x_i}}_k f$.
