Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 36

Titolo nota 15/08/2014

3 giugno 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI (...CONTINUA...)

DEF. 1 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, SIANO $f_1, f_2, \dots, f_m$ LE COMPONENTI DI f, DIREMO CHE f È DERIVABILE IN $\bar{x}$ SE TUTTE LE SUE COMPONENTI SONO DERIVABILI IN $\bar{x}$, CIOÈ SE $\forall i = 1, \dots, n$ E $\forall k = 1, \dots, m$ ESISTE $\partial_{x_i} f_k(\bar{x})$

LA MATRICE $J_f(\bar{x})$ DEFINITA DA:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\bar{x}) & \partial_{x_2} f_1(\bar{x}) & \partial_{x_n} f_1(\bar{x}) \\ \partial_{x_1} f_2(\bar{x}) & \partial_{x_2} f_2(\bar{x}) & \partial_{x_n} f_2(\bar{x}) \\ \vdots & & \\ \partial_{x_1} f_m(\bar{x}) & \partial_{x_2} f_m(\bar{x}) & \partial_{x_n} f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

PRENDE IL NOME DI MATRICE JACOBIANA DI f.

OSS. 1 (CASI PARTICOLARI)

SE $m = 1$ $J_f(\bar{x})$ HA UNA SOLA RIGA, CHE COINCIDE CON $\nabla f(\bar{x})$.

SE $n = 1$ LA FUNZIONE È DEL TIPO $t \longmapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$, CON $t \in (a,b)$

E $J_f(\bar{x})$ HA UNA SOLA COLONNA, CHE INDICHIAMO ANCHE CON $f'(\bar{t})$:

$$J_f(\bar{t}) = \begin{pmatrix} f_1'(\bar{t}) \\ f_2'(\bar{t}) \\ \vdots \\ f_m'(\bar{t}) \end{pmatrix} = f'(\bar{t})$$

TEO. 1 (DERIVATA FUNZ. COMPOSTA, CASO PARTICOLARE)

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $X: (a,b) \to \Omega$, DERIVABILE IN $t_0 \in (a,b)$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, DIFFERENZIABILE IN $x_0 = X(t_0)$. ALLORA $F: (a,b) \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(X(t))$ È DERIVABILE IN t_0 E $F'(t_0) = \langle \nabla f(x_0), X'(t_0) \rangle$.

DIMO

SI HA

$$F'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x(t_0+h))-f(x(t_0))}{h}=$$

PERCHÉ f È DIFFERENZIABILE IN x_0

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\langle\nabla f(x_0),\, X(t_0+h)-X(t_0)\rangle+o(\|X(t_0+h)-X(t_0)\|)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\left\langle\nabla f(x_0),\,\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}\right\rangle+\frac{o(\|X(t_0+h)-X(t_0)\|)}{h}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\langle\nabla f(x_0),\,\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}\right\rangle=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(f_{x_1}(x_0)\,\frac{X_1(t_0+h)-X_1(t_0)}{h}+\dots+f_{x_n}(x_0)\cdot\frac{X_n(t_0+h)-X_n(t_0)}{h}\right)=$$

$$=f_{x_1}(x_0)\,X_1'(t_0)+\dots+f_{x_n}(x_0)\,X_n'(t_0)=\langle\nabla f(x_0),\,X'(t_0)\rangle$$

PER $h\to 0$ SI HA:

$$\|X(t_0+h)-X(t_0)\|\le|X_1(t_0+h)-X_1(t_0)|+\dots+|X_n(t_0+h)-X_n(t_0)|=$$

$$=|X_1'(t_0)\cdot h+o(h)|+\dots+|X_n'(t_0)\cdot h+o(h)|=$$

$$=(|X_1'(t_0)|+\dots+|X_n'(t_0)|)\cdot|h|+o(h)$$

CIOÈ:

$$0\le\|X(t_0+h)-X(t_0)\|\le C\cdot|h|+o(h)$$

CON C COSTANTE POSITIVA.

MA ALLORA OGNI FUNZIONE CHE SIA $o(\|X(t_0+h)-X(t_0)\|)$ È ANCHE $o(C\cdot|h|+o(h))$

CIOÈ $o(h)$, PER $h\to 0$.

CIÒ SIGNIFICA CHE $\dfrac{o(\|X(t_0+h)-X(t_0)\|)}{h}\to 0$ PER $h\to 0$

TEO 2 DATI $A \subset \mathbb{R}^k$ E $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTI, $\bar{t} \in A$ E $\bar{x} \in \Omega$, $X: A \to \Omega$ TALE CHE $X(\bar{t}) = \bar{x}$ DERIVABILE IN $\bar{t}$ E $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$.

ALLORA LA FUNZIONE $F: A \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(X(t))$ È DERIVABILE IN $\bar{t}$ E $\forall i = 1, \dots, k$ SI HA:

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(\bar{t}) = \left\langle \nabla f(\bar{x}), \left(\frac{\partial X_1}{\partial t_i}(\bar{t}), \dots, \frac{\partial X_n}{\partial t_i}(\bar{t}) \right) \right\rangle$$

INOLTRE, SE $f \in C^1(\Omega)$ E $X_i \in C^1(A)$ PER OGNI $i = 1, \dots, n$, ALLORA ANCHE $F \in C^1(A)$.

DIMO

PER OGNI FISSATO $i = 1, \dots, k$, PER CALCOLARE $\frac{\partial F}{\partial t_i}(\bar{t})$ BASTA APPLICARE IL **TEO.1** ALLA FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE t_i, DATA DA:

$$F(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{i-1}, s, \bar{t}_{i+1}, \dots, \bar{t}_k) = G(s) = f(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))$$

DOVE, $\forall p = 1, \dots, n$, PONIAMO

$$x_p(s) = X_p(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{i-1}, s, \bar{t}_{i+1}, \dots, \bar{t}_k)$$

GRAZIE AL TEO.1 SI HA:

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(\bar{t}) = G'(\bar{t}_i) = \left\langle \nabla f(\bar{x}), (x_1'(\bar{t}_i), \dots, x_n'(\bar{t}_i)) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \nabla f(\bar{x}), \left(\frac{\partial}{\partial t_i} X_1(\bar{t}), \dots, \frac{\partial}{\partial t_i} X_n(\bar{t}) \right) \right\rangle$$

SE POI f E X SONO C^1, SIA ∇f CHE $\frac{\partial}{\partial t_i} X_p$ SONO CONTINUE, QUINDI ANCHE $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ È CONTINUA.

TEO.3 (CASO GENERALE)

DATI $A \subset \mathbb{R}^k$ E $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTI, SIANO $X: A \to \Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ENTRAMBE DI CLASSE C^1, ALLORA $F: A \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto f(X(t))$ È DI CLASSE C^1 E, $\forall t \in A$, SI HA

$$J_F(t) = J_f(X(t)) \cdot J_X(t)$$

OVVERO:

$$\begin{pmatrix} \partial_{t_1} F_1(t), \dots, \partial_{t_k} F_1(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial_{t_1} F_m(t), \dots, \partial_{t_k} F_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x(t)), \dots, \partial_{x_n} f_1(x(t)) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x(t)), \dots, \partial_{x_n} f_m(x(t)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_{t_1} x_1(t) \dots \partial_{t_k} x_1(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial_{t_1} x_n(t) \dots \partial_{t_k} x_n(t) \end{pmatrix}$$

OVVERO $\forall i = 1, \dots, k \quad \forall p = 1, \dots, m$

(1)
$$\partial_{t_i} F_p(t) = \left\langle \nabla f_p(x(t)), \left(\partial_{t_i} x_1(t), \dots, \partial_{t_i} x_n(t) \right) \right\rangle$$

$\boxed{\text{DIMO}}$

SICCOME $f \in C^1(\Omega)$ ALLORA $\forall p = 1, \dots, m$ $f_p(x)$ È DIFFERENZIABILE QUINDI BASTA APPLICARE IL TEO. 2 PER OTTENERE LA **(1)**.
